Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

WS 2017/2018

Klausur zur Vorlesung Kommutative Algebra

Aufgabe 1:

Sei k ein Körper. Bestimmen Sie die Dimension der folgenden Ringe.

(i) $\mathbb{F}_p[X]$, für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$;
(ii) $k[X] \otimes_k k[X]$;
(iii) $\prod_i^n k$, $n \geq 1$;
(iv) $k[X,Y]/(Y^2 + (X+1)Y + X^2 - 1)$.

Aufgabe 2:

Begründen Sie, welche der folgenden Ringerweiterungen ganz sind.

(i) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$;
(ii) $k[X] \subset k[X,Y]$, für einen Körper k;
(iii) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Aufgabe 3:

(i) Formulieren Sie *going-up* für eine Ringerweiterungen $A \subset B$.
(ii) Geben Sie ein Beispiel einer Ringerweiterung an, welche die going-up Eigenschaft erfüllt.
(iii) Zeigen Sie, dass die Ringerweiterung $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[1/7]$ nicht die going-up Eigenschaft erfüllt.

Aufgabe 4:

Sei R ein Ring und M ein R-Modul.

(i) Zeigen Sie, dass M projektiv ist, falls M frei ist.
(ii) Geben Sie ein Beispiel eines Ringes R und eines projektiven R-Moduls M an, so dass M nicht frei ist.

Aufgabe 5:

Sei R ein **reduzierter** Ring.

(i) Sei $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Lokalisierung $S^{-1}R$ reduziert ist.
(ii) Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ein minimales Primideal. Zeigen Sie, dass die Lokalisierung $R_\mathfrak{p}$ ein Körper ist.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $\operatorname{Spec} R_\mathfrak{p}$.