Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

WS 2017/2018

Nachklausur zur Vorlesung
Kommutative Algebra

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie den ganzen Abschluss der folgenden Ringe in der angegebenen Ringerweiterung.

(i) $k[X_1, \ldots, X_n] \subset k(X_1, \ldots, X_n)$, für einen Körper k;
(ii) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[X]$;
(iii) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}(i) = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Dimension der folgenden Ringe.

(i) $\mathbb{Q}[X]/f(X)$, wobei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ein nichtkonstantes, irreduzibles Polynom ist;
(ii) $\mathbb{Z}[X]/f(X)$, wobei $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ ein nichtkonstantes, normiertes Polynom ist;
(iii) $\mathbb{Q}[X, X^{-1}]$.

Aufgabe 3:

Sei R ein Ring und $\mathrm{Nil}(R)$ das Nilradikal von R.

(i) Sei R noethersch. Zeigen Sie, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\mathrm{Nil}(R)^n = 0$.
(ii) Finden Sie ein Beispiel eines Ringes R, so dass $\mathrm{Nil}(R)$ kein Primideal ist.

Aufgabe 4:

Sei R ein Ring und M ein R-Modul.

(i) Zeigen Sie, dass M flach ist, falls M frei ist.
(ii) Geben Sie ein Beispiel eines R-Moduls M an, so dass M flach aber nicht frei ist.

Aufgabe 5:

Sei R ein Ring, $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal und M ein endlich erzeugter R-Modul.

(i) Zeigen Sie, dass $M_\mathfrak{p} = 0$ genau dann, wenn ein $s \in R \setminus \mathfrak{p}$ existiert mit $sM = 0$.
(ii) Folgern Sie aus (i), dass $M_\mathfrak{p} = 0$ eine offene Eigenschaft ist. Das heißt: Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ mit $M_\mathfrak{p} = 0$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subset \operatorname{Spec} R$ von $\mathfrak{p}$ mit $M_\mathfrak{q} = 0$ für alle $\mathfrak{q} \in U$.