Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

WS 2017/2018

Lösungsskizze zur Klausur
Kommutative Algebra

Aufgabe 1:

(i) $\mathbb{F}_p[X]$ ist ein Hauptidealring, also $\dim \mathbb{F}_p[X] = 1$.

(ii) $\dim k[X] \otimes_k k[X] = \dim k[X,Y] = 2$.

(iii) $\prod_i^n k$, $n \geq 1$ ist eine endlich dimensionale k-Algebra. Nach dem noetherschen Normalisierungssatz muss dieser Ring nulldimensional sein.
Alternativ: Die Primideale sind von der Form $\mathfrak{p}_i = ((1), \dots, (1), (0), (1), \dots, (1))$, wobei das Nullideal in dem i-ten Eintrag steht. Daraus folgt, dass alle Ketten die Länge 0 haben.

(iv) Sei $R = k[X,Y]/(Y^2 + (X+1)Y + X^2 - 1)$.
Nach dem Eisenteinkriterium für das Primelement $X+1 \in k[X]$, ist das Polynom $Y^2 + (X+1)Y + X^2 - 1$ irreduzibel in $\mathrm{Quot}(k(X))[Y]$ und in $k[X,Y]$.
Dann gilt:

$$\dim R = \mathrm{trdeg}_k \mathrm{Quot}(R) = \mathrm{trdeg}_k k(X)[Y]/(Y^2 + (X+1)Y + X^2 - 1) = 1$$

Alternativ: Das Element $Y^2 + (X+1)Y + X^2 - 1 \in k[X,Y]$ ist ein Nicht-Nullteiler. Aus dem Krullschen Hauptidealsatz folgt dann $\dim R = 1$.

Aufgabe 2:

(i) Das Element $i \in \mathbb{Z}[i]$ erfüllt die Gleichung $i^2 + 1 = 0$. Somit ist auch jedes Element in $\mathbb{Z}[i]$ Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten.

(ii) Y erfüllt keine Ganzheitsgleichung über $k[X]$, also ist die Ringerweiterung nicht ganz.

(iii) $\mathbb{Z}$ ist faktoriell und somit normal, also ist der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ gleich $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3:

(i) Siehe Vorlesungsmitschrift.

(ii) Jede ganze Ringerweiterung erfüllt die going-up Eigenschaft, z.B. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[i]$.

(iii) Die Kette $(0) \subset (7)$ von Primidealen in $\mathbb{Z}$ kann nicht zu einer Kette von Primidealen in $\mathbb{Z}[1/7]$ geliftet werden.

Aufgabe 4:

(i) Sei $g\colon M \longrightarrow N$ ein surjektiver Morphismus und sei $f\colon R^{(I)} \longrightarrow N$ ein Morphismus von R-Moduln. Dann existiert eine Abbildung $h\colon R^{(I)} \longrightarrow M$ so dass $g \circ h = f$ indem man eine Basis von $R^{(I)}$ liftet: Sei (e_i) eine Basis von $R^{(I)}$ und sei $n_i = f(e_i)$. Wähle ein Lift m_i von n_i unter g. Dann erfüllt die Abbildung $h(e_i) = m_i$ die gewünschte Eigenschaft.
Alternativ: Ein R-Modul M ist projektiv, genau dann wenn M direkter Summand eines freien R-Moduls ist. Somit ist offensichtlich jeder freier R-Modul projektiv.

(ii) Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ und $\mathfrak{a} = (3, 1 + \sqrt{-5})$. In einer Übungsaufgabe haben wir gesehen, dass $\mathfrak{a}$ projektiv, aber nicht frei ist.
Ein anderes Beispiel ist gegeben durch den Ring $R = \mathbb{Z}/6$. Dann ist $\mathbb{Z}/2$ ein projektiver R-Modul, welcher nicht frei sein kann, da jeder freie R-Modul $\neq 0$ mindestens 6 Elemente besitzen muss.

Aufgabe 5:

(i) Sei $\frac{r}{t} \in S^{-1}R$ nilpotent. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, $s \in S$ mit $sr^n = 0$ in R. Also ist $(sr)^n = 0$ und somit ist $sr \in R$ nilpotent. Da R reduziert ist, muss schon $sr = 0$ gelten und folglich $\frac{r}{t} = 0$ in $S^{-1}R$.

(ii) Die Primideale von $R_\mathfrak{p}$ stehen in Bijektion zu den Primidealen $\mathfrak{q}$ von R mit $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ minimal ist, gilt folglich $\operatorname{Spec} R_\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}\}$. Da R reduziert ist, ist auch $R_\mathfrak{p}$ reduziert, also

$$\bigcap_{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R_\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{p}\} = (0).$$

Somit ist (0) das einzige maximale Ideal von $R_\mathfrak{p}$, folglich ist $R_\mathfrak{p}$ ein Körper.