Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

WS 2018/2019

Seminar: Lokale Körper und ihre Galoisgruppen

Lokale Körper sind Objekte der algebraischen Zahlentheorie und entstehen auf natürlich Art und Weise durch Vervollständigen von Zahlkörpern an Absolutbeträgen.
Ein lokaler Körper ist ein Körper, der zusätzlich ein lokal kompakter, hausdorffscher topologischer Raum ist. Wir werden uns mit nicht-archimedischen lokalen Körpern beschäftigen. Man kann zeigen, dass jeder solcher Körper entweder isomorph ist zu einer endlichen Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ oder zu einer endlichen Erweiterung von $\mathbb{F}_q(\!(t)\!)$ ist.

Im ersten Teil des Seminars werden wir uns mit einigen Grundlagen der Arithmetik beschäftigen. Insbesondere werden wir uns mit der Struktur von (vollständigen) diskreten Bewertungsringen in gleicher und gemischter Charakteristik beschäftigen. Eine zentrale Rolle spielt hierbei der Ring der Witt-Vektoren eines (perfekten) Körpers in Charakteristik p.
Im zweiten Teil des Seminars beschäftigen wir uns mit der Struktur der Galoisgruppe eines lokalen Körpers. Für einen lokalen Körper $K/\mathbb{Q}_p$ werden wir dafür bestimmte Untergruppen der absoluten Galoisgruppe $\mathcal{G}_K$, die sogenannten Verzweigungsgruppen, untersuchen. Danach betrachten wir ℓ-adische Darstellungen ($\ell \neq p$) von $\mathcal{G}_K$, d.h. stetige Gruppenhomomorphismen $\mathcal{G}_K \longrightarrow \mathrm{GL}_n(L)$, wobei L ein ℓ-adischer Körper ist, sowie Darstellungen gewisser Untergruppen von $\mathcal{G}_K$. Ziel wird es sein, Grothendieck's ℓ-adischen Monodromiesatz zu beweisen.

1) **Unendliche Galoistheorie**
Wiederholung Hauptsatz der Galoistheorie für endliche Erweiterung [SZ, 1, Theorem 1.2.5.]. Unendliche Galoistheorie [SZ, 1.3]. Siehe auch [N, IV,§1,§2].

2) **Dedekindringe**
Kurze Einführung in die Theorie der diskreten Bewertungsringe [S, 1,§1]. Die Sätze [S, I,§2,Prop. 1,2,3] sollen in einem Satz zusammengefasst werden. Dedekindringe [S, I,§3].

3) **Erweiterungen von Dedekindringen**
[S, I,§4]: Eigenschaften von Erweiterungen. Verzweigungsindex. Fundamentale Gleichung.

4) **Stuktur von DBR in gleicher Charakteristik**
[S, II,§4]: Struktursatz von DBR in gleicher Charakteristik [S, II,§4, Theorem 2]. Hensel's Lemma. Eigenschaften.

5) **Struktur von DBR in ungleicher Charakteristik**
Struktursatz von DBR in ungleicher Charakteristik [S, II,§5,Theorem 3. und 4.]. Beispiel. Funktorialität. Wittvektoren [S, I,§6].

6) **Lokale Körper**
Komplettierung und Satz [N, II,§4,Satz. 4.4./5.]. Bewertungen können fortgesetzt werden [N, II, §4, Theorem 4.8.]. Definition und Klassifikation lokaler Körper [N, II, §5, Satz. 5.2.].

7) **Verzweigungstheorie**
Unverzweigte Erweiterung entsprechen Erweiterungen des Restklassenkörpers [A, Theorem 1.2.]. Reine Verzweigung in Termen von Eisensteinpolynomen [A, Theorem 2.4.]. Verzweigungsgruppen und [A, Korollar 2.9.]. Zyklotomische Erweiterungen [S, IV,§4].

8) **Struktur der absoluten Galoisgruppe**
Zahm verzweigte Erweiterung [C, 10]. Zerlegung der absoluten Galoisgruppe [C, 11]. Definition ℓ-adischer Galois Darstellungen [U1, Definition 10.1] und [U1, Lemma 10.3.].
9) **Der ℓ-adische Monodromiesatz**
Der ℓ-adische Monodromiesatz [U2, Theorem 2.1]. Siehe auch [W, Proposition 3.2.7.]. Klassifikation semi-stabiler ℓ-adischer Darstellungen [W, Theorem 3.2.8.]. Von ℓ-adischen Darstellungen zu Weil-Deligne Darstellungen [W, Proposition 3.2.14.].
10) **Mod-p Galois Darstellungen**
[FO, 2.2.]: Étale φ-Moduln über einem Körper der Charakteristik p, [FO, 2.2.1.]. Äquivalenz von Kategorien [FO, Theorem 2.21.].

Literatur

[A] `http://math.arizona.edu/~cais/Prelim/LocalFieldExt.pdf`
[C] P. Clark, *lecture notes on local fields* `http://math.uga.edu/~pete/local.pdf`
[FO] J.-M. Fontaine, Y. Ouyang, *Theory of p-adic Galois Representations*, `https://www.math.u-psud.fr/~fontaine/galoisrep.pdf`
[N] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer.
[S] J.-P. Serre, *Local fields*, Springer.
[SZ] T. Szamuely, *Galois groups and fundamental groups*, Cambridge University Press.
[U1] `https://math.mit.edu/~cctsai/18.786/LN/10.pdf`
[U2] `http://www.math.ru.nl/~jcommelin/files/wdreps.pdf`
[W] G. Wiese, *Galois representations*, `http://math.uni.lu/~wiese/notes/GalRep.pdf`