Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

WS 2017/2018

Kommutative Algebra
Weihnachtszettel
Abgabe: 11.01.2018 (freiwillig)

Aufgabe 1:

Sei k ein Körper und sei $\iota\colon k[T] \longrightarrow k[T, T^{-1}]$ die kanonische Inklusion.
Zeigen Sie, dass die Ringerweiterung going-down, aber nicht going-up erfüllt, indem Sie

(i) Primidealketten angeben,
(ii) die induzierte Abbildung $\operatorname{Spec} k[T, T^{-1}] \longrightarrow \operatorname{Spec} k[T]$ untersuchen. Ist die Abbildung offen bzw. abgeschlossen?

Zeigen Sie weiter, dass die Ringerweiterung nicht ganz ist, indem Sie ein Element angeben, welches keine Ganzheitsgleichung erfüllt.

Aufgabe 2:

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Seien $f\colon k[X] \longrightarrow A = k[X, Y]/(X^4 + Y^4 - X^2)$ und $g\colon k[X] \longrightarrow B = k[X, Y]/(X^2 - X + Y^6 - XY)$ die kanonischen Morphismen.

(i) Zeigen Sie, dass A und B endliche Ringerweiterungen über $k[X]$ sind.
(ii) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Spec} A$ und $\operatorname{Spec} B$ irreduzibel sind. Mit anderen Worten: Die Polynome $X^4 + Y^4 - X^2$ und $X^2 - X + Y^6 - XY$ sind irreduzibel in $k[X, Y]$.
(iii) Zeigen Sie, dass die nicht-trivialen abgeschlossenen Mengen von $\operatorname{Spec} A$ und $\operatorname{Spec} B$ genau die endlichen Mengen sind.
Hinweis: Zeigen Sie erst, dass die kanonische Projektion $\operatorname{Spec} A \longrightarrow \operatorname{Spec} k[X]$ abgeschlossen ist und danach, dass die Faser der Projektion über dem generischen Punkt genau der generische Punkt von $\operatorname{Spec} A$ ist. Die gleichen Aussagen gelten auch für $\operatorname{Spec} B$.

Aufgabe 3:

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

(i) Sei $\varphi\colon \operatorname{Spec} k[X, Y, T]/(TXY - T) \longrightarrow \operatorname{Spec} k[T]$ die Abbildung, welche induziert wird durch den kanonischen Morphismus $f\colon k[T] \longrightarrow k[X, Y, T]/(TXY - T)$. Bestimmen Sie die Fasern von φ an den abgeschlossenen Punkten $\mathfrak{m} = (T - a)$, für $a \in k$.
(ii) Sei $\psi\colon \operatorname{Spec} k[X, Y, T]/(XY - T) \longrightarrow \operatorname{Spec} k[T]$ die Abbildung, welche induziert wird durch den kanonischen Morphismus $g\colon k[T] \longrightarrow k[X, Y, T]/(XY - T)$. Bestimmen Sie die Fasern von ψ an den abgeschlossenen Punkten $\mathfrak{m} = (T - a)$ für $a \in k$.
(iii) Zeigen Sie, dass die Abbildung g flach ist. Zeigen Sie weiter, dass f nicht flach ist.
(iv) Erfüllt f die going-down Eigenschaft?

Aufgabe 4:

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

(i) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Spec} k[X, Y] \not\cong \operatorname{Spec} k[X] \times \operatorname{Spec} k[Y]$, wobei die rechte Seite das Produkt von Mengen (bzw. topologischen Räumen) ist.

Im folgenden identifizieren wir $\operatorname{SpecMax} k[T_1, \dots, T_n]$ mit $k^n = \mathbb{A}^n$, versehen mit der Zariski-Topologie.

(ii) Zeigen Sie, dass der affine Raum $\mathbb{A}^2$ das Prokukt $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ in der Kategorie der affinen algebraischen Mengen ist.
(iii) Zeigen Sie, dass die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^2$ nicht die Produkttopologie der Zariski-Topologien der zwei Kopien von $\mathbb{A}^1$ ist.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen