Übungen zur Torischen Geometrie, L. Hille, M. Blume

Sommersemester 2018

Übungsblatt 1, Abgabe: Mittwoch, 25.4.2018

Seien M und N zueinander duale Gitter.

Aufgabe 1. Zeige: Das Bilden des dualen Kegels definiert eine inklusions-umkehrende Bijektion zwischen der Menge abgeschlossener konvexer Kegel in $N_{\mathbb{R}}$ und der Menge abgeschlossener konvexer Kegel in $M_{\mathbb{R}}$.
Hinweis: Verwende folgenden fundamentalen Satz: Sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein abgeschlossener konvexer Kegel und $v \in N_{\mathbb{R}} \setminus \sigma$. Dann gibt es ein $u \in \sigma^\vee$, so dass $\langle u, v\rangle < 0$.

Aufgabe 2. Für abgeschlossene konvexe Kegel $\rho, \sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ gilt: $(\rho \cap \sigma)^\vee = \overline{\rho^\vee + \sigma^\vee}$ und $(\overline{\rho + \sigma})^\vee = \rho^\vee \cap \sigma^\vee$. Insbesondere: $\sigma = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \iff \sigma^\vee = v_1^\vee \cap \ldots \cap v_n^\vee$.

Aufgabe 3. Jede Seite eines konvexen polyedrischen Kegels ist ein konvexer polyedrischer Kegel. Falls σ von einer endlichen Menge $V \subset N_{\mathbb{R}}$ erzeugt wird, dann wird jede Seite von σ von einer Teilmenge von V erzeugt.

Aufgabe 4. Zeige: Ein konvexer polyedrischer Kegel $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ist Schnitt endlich vieler Halbräume

$$\sigma = u_1^\vee \cap \ldots \cap u_k^\vee$$

und der duale Kegel $\sigma^\vee$ ist ein konvexer polyedrischer Kegel. Falls σ rational ist, so können u_i als Elements von M gewählt werden und $\sigma^\vee$ ist ebenfalls rational.
Hinweis: Es kann verwendet werden, dass der Rand eines voll-dimensionalen konvexen polyedrischen Kegels die Vereinigung der Facetten ist.