Übungen zur Torischen Geometrie, L. Hille, M. Blume

Sommersemester 2018

Übungsblatt 2, Abgabe: Mittwoch, 2.5.2018

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1. Sei $A = k[x_1, \dots, x_n]$. Zeige:
(a) Für Teilmengen $T_1, T_2 \subseteq A$ gilt: $T_1 \subseteq T_2 \implies Z(T_1) \supseteq Z(T_2)$.
Für Teilmengen $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{A}^n_k$ gilt:
(b) $Y_1 \subseteq Y_2 \implies I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$.
(c) $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.
(d) Maximale Ideale von A sind von der Form $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ mit $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$.

Aufgabe 2. Sei $A = k[x_1, \dots, x_n]$. Zeige:
(a) Für Teilmengen $Y \subseteq \mathbb{A}^n_k$ gilt:

$$Z(I(Y)) = \overline{Y}$$

wobei $\overline{Y}$ der Zariski-Abschluss von Y ist.
(b) Für Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ gilt:

$$I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$$

wobei $\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in A \mid \exists\, n > 0\colon f^n \in \mathfrak{a}\}$ das Radikal von $\mathfrak{a}$ ist.
Hinweis: Bei (b) kann Aufgabe 3 verwendet werden.

Aufgabe 3. Sei A ein noetherscher Ring. Zeige:
(a) $\sqrt{\langle 0 \rangle} = \bigcap \{\mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p} \textit{ Primideal}\}$
(b) Für Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ gilt: $\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap \{\mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p} \textit{ Primideal}, \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$
(c) Für Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ gilt: $f \in A \setminus \sqrt{\mathfrak{a}} \implies \exists\, \mathfrak{m} \subset A \textit{ max. Ideal}\colon \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m} \textit{ and } \bar{f} \neq 0 \textit{ in } A/\mathfrak{m}$

Aufgabe 4. Sei A ein Ring und $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge (z.B. $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ oder $S = A \setminus \mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p}$ ein Primideal). Die Lokalisierung von A nach S wird wie üblich als Menge von Äquivalenzklassen $\frac{a}{s}$ von Paaren $(a, s) \in A \times S$ definiert und hat die übliche Addition und Multiplikation. Sei $\iota\colon A \to A[S^{-1}]$, $a \mapsto \frac{a}{1}$ der natürliche Ringhomomorphismus.
Zeige, dass $A[S^{-1}]$ folgende universelle Eigenschaft besitzt: Ist $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus, der Elemente von S auf Einheiten in B abbildet, so gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\varphi'\colon A[S^{-1}] \to B$ mit $\varphi = \varphi' \circ \iota$.