Übungen zur Torischen Geometrie, L. Hille, M. Blume

Sommersemester 2018

Übungsblatt 3, Abgabe: Mittwoch, 16.5.2018

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1. Sei $\alpha\colon A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Zeige:
(a) Ist $\mathfrak{b}$ ein Ideal bzw. Primideal von B, so ist $\alpha^{-1}(\mathfrak{b})$ ein Ideal bzw. Primideal von A.
(b) Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von A ist das Bild $\alpha(\mathfrak{a})$ ein Ideal von B, genau dann wenn α surjektiv ist.

Aufgabe 2. Sei $\varphi\colon V \to W$ ein Morphismus affiner algebraischer Varietäten und $\varphi^\sharp\colon B \to A$ der zugehörige Homomorphismus der Koordinatenringe. Zeige:
(a) Ist $\varphi^\sharp$ surjektiv, so ist $\varphi(V)$ abgeschlossen.
(b) Ist $\varphi(V)$ dicht in W, dann ist $\varphi^\sharp$ injektiv.
(c) Bilder $\varphi(Y) \subseteq W$ von irreduziblen Teilmengen $Y \subseteq V$ sind irreduzibel.

Aufgabe 3. Sei $\varphi\colon \mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^2_k$, $t \mapsto (t^2, t^3)$ und $C = Z(x_1^3 - x_2^2) \subset \mathbb{A}^2_k$. Zeige, dass $\varphi(\mathbb{A}^1_k) = C$ und die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{A}^1_k \to C$ ein bijektiver Morphismus aber kein Isomorphismus algebraischer Varietäten ist.

Aufgabe 4. Sei $d \geq 1$.
(a) Seien $f_0, \dots, f_N$ die normierten Monome vom Grad d in $k[x_0, \dots, x_n]$. Zeige, dass der Morphismus

$$\begin{array}{rccl} \psi\colon & \mathbb{P}^n_k & \to & \mathbb{P}^N_k \\ & p & \mapsto & (f_0(p) : f_1(p) : \ldots : f_N(p)) \end{array}$$

eine abgeschlossene Einbettung ist.
(b) Sei $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad d. Zeige, dass $\mathbb{P}^n_k \setminus Z(f)$ isomorph zu einer affinen Varietät ist.