Übungen zur Torischen Geometrie, L. Hille, M. Blume

Sommersemester 2018

Übungsblatt 4, Abgabe: Mittwoch, 30.5.2018

Aufgabe 1. Sei $\varphi\colon T \to T'$ ein Homomorphismus von algebraischen Tori und $\alpha\colon \check{T}' \to \check{T}$ der zugehörige Homomorphismus der Charaktergruppen. Zeige:
(a) φ ist eine abgeschlossene Einbettung genau dann, wenn α surjektiv ist.
(b) Ist φ surjektiv, dann ist α injektiv.

Aufgabe 2. Der Torus $(\mathbb{C}^*)^3$ operiert auf $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ durch $(t_1, t_2, t_3)(a_1, a_2, a_3) = (t_1a_1, t_2a_2, t_3a_3)$. Dies induziert eine Operation des Torus $T = Z(x_2^2 - x_1x_3) \subset (\mathbb{C}^*)^3$ auf der affinen Varietät $X = Z(x_2^2 - x_1x_3) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$. Dadurch wird der Koordinatenring von X zu einer Darstellung von $T \cong (\mathbb{C}^*)^2$. Man bestimme die Zerlegung in Eigenräume zu den Charakteren von T und skizziere die Menge der dabei auftretenden Charaktere in der Charaktergruppe $\check{T} \cong \mathbb{Z}^2$.

Aufgabe 3. Sei H eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Wir bezeichnen mit $\mathbb{C}[H]$ die Algebra $\bigoplus_{u\in H} \mathbb{C}x^u$ mit $x^0 = 1$ und Multiplikation $x^u x^{u'} = x^{u+u'}$. Sei G die affine algebraische Varietät zum Koordinatenring $\mathbb{C}[H]$. Zeige:
(a) Mit $e\colon 1 \to G$, $m\colon G\times G \to G$, $i\colon G \to G$ definiert durch $e^\sharp(x^u) = 1$, $m^\sharp(x^u) = x^u \otimes x^u$, $i^\sharp(x^u) = x^{-u}$ wird G zu einer algebraischen Gruppe.
(b) Es gibt einen Isomorphismus $G \cong (\mathbb{C}^*)^n \times \prod_i \mu_{k_i}$ für gewisse n, k_i, wobei μ_{k_i} die algebraische Gruppe zur Koordinatenalgebra $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/k_i\mathbb{Z}]$ ist.

Aufgabe 4. Zeige: Eine exakte Sequenz freier abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n'} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}^{n''} \longrightarrow 0$$

induziert eine Sequenz algebraischer Tori

$$1 \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^{n''} \xrightarrow{\varphi_\beta} (\mathbb{C}^*)^n \xrightarrow{\varphi_\alpha} (\mathbb{C}^*)^{n'} \longrightarrow 1$$

wobei φ_β eine abgeschlossene Einbettung, φ_α surjektiv und $\varphi_\beta((\mathbb{C}^*)^{n''}) = \varphi_\alpha^{-1}(\{1\})$. Bestimme das Ideal für $\varphi_\beta((\mathbb{C}^*)^{n''}) \subseteq (\mathbb{C}^*)^n$.