Prof. Dr. E. Hellmann
Mark Feldmann

SoSe 2018

Lineare Algebraische Gruppen
Blatt 1
Abgabe: 25.04.2018

Es sei im Folgenden k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1:

Man zeige, dass die Zariski-Topologie auf k^2 (echt) feiner ist als die Produkttopologie (der Zariski-Topologien) auf $k \times k$. [Hinweis: Die Produkttopologie auf einem (endlichen) Produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$ topologischer Räume $X_1, \ldots, X_n$ ist wie folgt definiert. Die offenen Mengen bestehen aus den Mengen der Form $U_1 \times \cdots \times U_n$, wobei die U_i offene Mengen in X_i sind für $i = 1, \ldots, n$.]

Aufgabe 2:

(1) Man zeige, dass die Diagonaleinbettung $\Delta\colon k \to k^n$ gegeben durch $x \mapsto (x, x, \ldots, x)$ eine stetige und abgeschlossene Abbildung ist für alle $n \geq 1$ (bezüglich der Zariski-Topologie auf Quelle und Ziel).

(2) Man bestimme das Verschwindungsideal der Menge
$$M := \{(m, m, \ldots, m) \mid m \in \mathbb{Z}\} \subseteq k^n$$
und entscheide ob dies ein Primideal ist.

Aufgabe 3:

(1) Man bestimme die irreduziblen Komponenten der Verschwindungsmenge
$$V(X^2 - YZ, XZ - X) \subseteq k^3.$$
[Erinnerung: Eine irreduzible Komponente ist eine (bezüglich Inklusion) maximale irreduzible Teilmenge und jeder topologische Raum ist die Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten.]

(2) Man zeige, dass die Menge
$$C := \{(t, t^2, t^3) \mid t \in k\} \subseteq k^3$$
eine algebraische Teilmenge ist und überprüfe ob diese irreduzibel ist.

Aufgabe 4:

Es sei X eine affine algebraische Menge und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge sowie $g\colon U \to k$ eine Abbildung. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- Es existiert eine Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ mit $f_i \in \mathcal{O}(X)$, sodass $g|_{D(f_i)} \in \mathcal{O}(D(f_i))$ für alle $i \in I$ gilt.
- Für alle Überdeckungen $U = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ mit $f_i \in \mathcal{O}(X)$ gilt $g|_{D(f_i)} \in \mathcal{O}(D(f_i))$ für alle $i \in I$.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen