Prof. Dr. E. Hellmann
Mark Feldmann SoSe 2018

Lineare Algebraische Gruppen
Blatt 10
Abgabe: 04.07.2018

Es sei im Folgenden k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1: Es sei G eine lineare algebraische Gruppe und $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) G/H ist irreduzibel.
(b) Der Durchschnitt von H mit jeder irreduziblen Komponente von G ist nicht leer.
(c) $G = G^0 H$.

Aufgabe 2: Es sei G eine lineare algebraische Gruppe und $H \subseteq G$ sowie $K \subseteq G$ irreduzible abgeschlossene Untergruppen. Man zeige, dass $HK \subseteq G$ eine irreduzible quasi-affine Varietät ist für die

$$\dim(HK) = \dim(H) + \dim(K) - \dim(H \cap K)$$

gilt.
[Hinweis: Man betrachte die Aktion von $H \times K$ auf G via $(x, y).g = xgy^{-1}$ für $g \in G, x \in H$ und $y \in K$.]

Aufgabe 3: Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum der Dimension n und $1 \leq n_1 \leq \cdots \leq n_r \leq n$ eine aufsteigende endliche Folge natürlicher Zahlen. Wir definieren die Flaggenvarietät

$$\mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r) := \{\{0\} \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_r \subseteq V \text{ Untervektorräume } \mid \dim(V_i) = n_i\}.$$

(i) Man zeige, dass es eine injektive Abbildung

$$\mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r) \to \mathrm{Gr}(n_1; V) \times \cdots \times \mathrm{Gr}(n_r; V)$$

in das Produkt der entsprechenden Graßmannschen gibt und zeige, dass diese Abbildung abgeschlossenes Bild hat. Wir fassen $\mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r)$ via dieser Identifikation als Varietät auf.

(ii) Es bezeichne $\mathcal{B}_n \subseteq \mathrm{GL}_n$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen. Man zeige, dass der Quotient $\mathrm{GL}_n/\mathcal{B}_n$ als Varietät isomorph zu $\mathcal{F}(V; 1, \ldots, n)$ ist.

Aufgabe 4: Es sei G eine lineare algebraische Gruppe, $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe, X eine H-Varietät und $\pi \colon G \to G/H$ die kanonische Projektion. Wir sagen, dass π lokale Schnitte hat, falls es eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von G/H gibt, sodass für alle $U \in \mathcal{U}$ eine Abbildung (Schnitt) $\sigma_U \colon U \to G$ existiert mit $\pi \colon \sigma_U = \mathrm{id}_U$. Es trage $G \times X$ die Struktur eine H-Rechts-Varietät via $(g, x).h := (gh, h^{-1}x)$ für alle $x \in X, g \in G$ und $h \in H$.

(i) Man zeige, dass der Quotient $(G \times X)/H$ existiert, falls π lokale Schnitte hat.
(ii) Man zeige, dass der kanonische Morphismus $\mathrm{GL}_n \to \mathbb{P}^{n-1}$ lokale Schnitte hat.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen