Prof. Dr. E. Hellmann
Mark Feldmann SoSe 2018

Lineare Algebraische Gruppen
Blatt 11
Abgabe: 11.07.2018

Es sei im Folgenden k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1: Wir betrachten $\mathbb{G}_m$ als abgeschlossene Untergruppe von GL_2 via

$$a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

für $a \in k^\times$ und definieren PGL_2 als den Quotienten $\mathrm{GL}_2/\mathbb{G}_m$. Man zeige, dass es einen Homomorphismus von Gruppen zwischen PGL_2 und den Automorphismen $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ der projektiven Gerade gibt.

Aufgabe 2:
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{PGL}_n := \mathrm{GL}_n/\mathbb{G}_m$. Man gebe konkret eine abgeschlossene Einbettung von PGL_n in eine GL_N für ein $N \in \mathbb{N}$ an.

Aufgabe 3:

(i) Es sei G eine lineare algebraische Gruppe und $H \leq G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Man zeige, dass es einen Isomorphismus von Ringen zwischen $\mathcal{O}_{G/H}(G/H)$ und

$$\{f \in \mathcal{O}_G(G) \mid f(gh) = f(g) \text{ für alle } g \in G, h \in H\}$$

gibt.

(ii) Es seien G_1 und G_2 lineare algebraische Gruppen sowie $H_1 \leq G_1$ und $H_2 \leq G_2$ abgeschlossene Untergruppen. Man zeige, dass es einen Isomorphismus linearer algebraischer Gruppen

$$(G_1 \times G_2)(H_1 \times H_2) \cong (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$$

gibt.

Aufgabe 4: Es sei Y eine affine irreduzible Varietät und $R := \mathcal{O}_Y(Y)$. Wir setzen $U_i := D_+(T_I) \times Y \subseteq \mathbb{P}^n \times Y$ für $i = 0, \ldots, n$ und identifizieren

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times Y}(U_i) \cong R \otimes_k k[\frac{T_0}{T_i}, \ldots, \frac{T_m}{T_i}] \cong R[\frac{T_0}{T_i}, \ldots, \frac{T_m}{T_i}] =: R_i.$$

Wir definieren die Abbildung

$$S := R[T_0, \ldots, T_m] \to R_i, f \mapsto \tilde{f} := f(\frac{T_0}{T_i}, \ldots, \frac{T_m}{T_i}).$$

Zudem sei $S = \bigoplus_m S_m$ die Graduierung gegeben durch die Gradfunktion für Polynome und $Z \subseteq \mathbb{P}^n \times Y$ eine abgeschlossene Teilmenge.

(i) Es sei $\tilde{f} \in R_i$. Man zeige, dass es eine natürliche Zahl $m > 0$ gibt, sodass $T_i^m \tilde{f} \in S_m$ gilt.

(ii) Es sei $\tilde{f} \in I_+(Z \cap U_i) \subseteq R_i$. Man zeige, dass es eine natürliche Zahl $m > 0$ gibt, sodass $T_i^m \tilde{f} \in I_m$ gilt, wobei

$$I_m := \{f \in S_m \mid \tilde{f} \in I_+(Z \cap U_i) \text{ für alle } i \in \{0, \ldots, n\}\}$$

ist.

(iii) Man zeige, dass das Bild von Z unter der Projektion $\mathbb{P}^n \times Y \to Y$ auf Y abgeschlossen ist.
[Hinweis: Man verwende die folgende Form von Nakayamas Lemma: Es sei A ein Ring und $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein maximales Ideal sowie N ein endlich erzeugter A-Modul. Dann existiert ein $x \in R \setminus \mathfrak{m}$, sodass $x.N = 0$ gilt.]

Dies zeigt insbesondere, dass jede projektive Varietät eigentlich ist.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen