Prof. Dr. E. Hellmann
Mark Feldmann

SoSe 2018

Lineare Algebraische Gruppen
Blatt 2
Abgabe: 02.05.2018

Es sei im Folgenden k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1:

Es sei X ein topologischer Raum.

(i) Es sei X irreduzibel und $\emptyset \neq U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Man zeige, dass U in X dicht ist und dass U versehen mit der Unterraum-Topologie ebenfalls irreduzibel ist.

(ii) Es sei $Y \subseteq X$ eine irreduzible Teilmenge. Man zeige, dass auch $\overline{Y}$ irreduzibel ist.

(iii) Es sei nun $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine algebraische Menge und $Y \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Man zeige, dass die Dimensionen von Y und $\overline{Y}$ als topologische Räume übereinstimmen.

Aufgabe 2:

Wir fassen die Menge der $(n \times n)$-Matrizen $\mathrm{Mat}(n, k)$ als $\mathbb{A}^{n^2}$ auf und definieren

$$\det\colon \mathbb{A}^{n^2} \to k$$

als die Abbildung, die einer Matrix A ihre Determinante $\det(A)$ zuordnet.

(i) Man zeige, dass die Menge der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen eine affine algebraische Menge ist. Wir bezeichnen die zugehörige affine Varität mit GL_n.

(ii) Man bestimme die Dimension von GL_n als topologischer Raum.

Es sei $\mathrm{t}\colon \mathbb{A}^{n^2} \to \mathbb{A}^{n^2}$ die Abbildung, die einer Matrix ihre transponierte Matrix zuordnet, und $\mathrm{inv}\colon \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n$ die Abbildung, die einer Matrix ihre inverse Matrix zuordnet.

(iii) Man zeige, dass t und inv Morphismen von von affinen Varietäten sind.

Aufgabe 3:

Es seien X und Y affine Varietäten und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus. Wir bezeichnen die induzierte Abbildung

$$\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$$

mit f^*.

(i) Es sei $S \subseteq Y$ ein Teilmenge. Man zeige, dass $S \subseteq Y$ genau dann nicht dicht ist, wenn es ein $0 \neq q \in \mathcal{O}(Y)$ gibt, sodass $q(s) = 0$ gilt für alle $s \in S$.

(ii) Man zeige, dass f genau dann dominant ist, wenn f^* injektiv ist.
[Wir nennen f dominant, falls das Bild von f dicht in Y ist.]

(iii) Es sei $f\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ der Morphismus von affinen Varietäten, der gegeben ist durch $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_1 x_2)$. Man zeige, dass das Bild von f dicht aber nicht offen in $\mathbb{A}^2$ ist und dass f^* injektiv ist.

Aufgabe 4:

Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine affine Varietät und $x \in X$ ein Punkt. Wir definieren die Menge

$$\mathcal{M}_{X,x} := \{(f, U) \mid x \in U \subseteq X \text{ offen, } f \in \mathcal{O}_X(U)\}.$$

(i) Man zeige, dass die Relation $\sim$ auf $\mathcal{M}_{X,x}$ gegeben durch

$$(f,U) \sim (g,V) :\Leftrightarrow \exists W \subseteq U \cap V \text{ offen mit } x \in W : f|_W = g|_W$$

eine Äquivalenzrelation definiert. Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen in $\mathcal{M}_{X,x}$ bezüglich dieser Äquivalenzrelation mit $\mathcal{O}_{X,x}$.

(ii) Man zeige, dass $\mathcal{O}_{X,x}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\{[(f,U)]_\sim \in \mathcal{O}_{X,x} \mid f(x) = 0\}$$

ist, wobei die Multiplikation durch

$$[(f,U)]_\sim \cdot [(g,V)]_\sim := [(f|_{U\cap V} \cdot g|_{U\cap V}, U \cap V)]_\sim$$

und die Addition durch

$$[(f,U)]_\sim + [(g,V)]_\sim := [(f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V}, U \cap V)]_\sim$$

gegeben sei für $[(f,U)]_\sim$ und $[(g,V)]_\sim$ aus $\mathcal{O}_{X,x}$.
[Hinweis: Um zu zeigen, dass ein Ring R lokal ist, genügt es zu zeigen, dass $R \setminus R^\times$ ein maximales Ideal ist.]

(iii) Setze $A := \mathcal{O}_X(X)$ und $\mathfrak{m}_x \subseteq A$ sei das zu x gehörige maximale Ideal. Man zeige, dass die kanonische Abbildung

$$A \to \mathcal{O}_{X,x} \text{ gegeben durch } f \mapsto [(f,X)]_\sim$$

einen Isomorphismus von Ringen

$$A_{\mathfrak{m}_x} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

induziert.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen