Prof. Dr. E. Hellmann
Mark Feldmann SoSe 2018

Lineare Algebraische Gruppen
Blatt 3
Abgabe: 09.05.2018

Es sei im Folgenden k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1:

Es seien A und B zwei k-Algebren vom endlichen Typ.

(i) Es seien A und B nullteilerfrei. Man zeige, dass das Tensorprodukt $A \otimes_k B$ ebenfalls nullteilerfrei ist.

(ii) Man zeige, dass $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ nicht nullteilerfrei ist.

(iii) Es sei $K := \mathbb{F}_p(t)$ und $A := K[T]/(T^p - t)$. Man zeige, dass die Körpererweiterung A/K nicht separabel ist und dass $A \otimes_K A$ nicht reduziert ist.

Aufgabe 2:

Es seien $X_1 := X_2 := \mathbb{A}^1$ und $U := \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \subseteq X_1, X_2$. Wir definieren die Prävarietät

$$X := X_1 \sqcup X_2 / \sim \text{ wobei } x \sim y :\Leftrightarrow x, y \in U$$

wie in der Vorlesung. Man zeige, dass das Bild der Diagonaleinbettung $\Delta \colon X \to X \times X$ nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 3:

Es sei X eine Varietät und $U, V \subseteq X$ seien offen und affin. Man zeige, dass der Durchschnitt von $U \cap V \subseteq X$ ebenfalls offen und affin ist.
[Hinweis: Man überlege sich, dass $U \cap V$ homöomorph zu $\Delta(X) \cap (U \times V)$ ist.]

Aufgabe 4:

lEs seien $n, m \geq 1$ natürliche Zahlen.

(i) Man zeige, dass die Abbildung

$$s \colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{nm+n+m}$$

gegeben durch

$$([x_0 : \ldots : x_n], [y_0 : \ldots : y_m]) \mapsto [x_i y_j]_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m}$$

wohldefiniert und injektiv ist.

(ii) Man zeige, dass das Bild von s in $\mathbb{P}^{nm+n+m}$ abgeschlossen und ein Homöomorphismus auf das Bild von s ist.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen