Prof. Dr. E. Hellmann SoSe 2018
Mark Feldmann

# Lineare Algebraische Gruppen
# Blatt 4
# Abgabe: 16.05.2018

Es sei im Folgenden $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

## Aufgabe 1:

Es sei $R := k[T_0, \dots, T_n]$ und $R_+ := (T_0, \dots, T_n) \subseteq R$. Man betrachte die kanonische Projektion

$$p\colon \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} \to \mathbb{P}^n, (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_n).$$

Für eine abgeschlossene Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{P}^n$ nennen wir $C(Z) := p^{-1}(Z)$ den affinen Kegel von $Z$ und

$$I_+(Z) := \{f \in R \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in (x_0 : \dots : x_n) \in Z\}$$

das projektive Verschwindungsideal von $Z$.

(i) Es sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein homogenes Ideal. Man zeige, dass auch $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein homogenes Ideal ist.

(ii) Man zeige, dass $I(C(Z)) = I_+(Z)$ gilt und dies ein homogenes Ideal ist für alle abgeschlossenen Teilmengen $Z \subseteq \mathbb{P}^n$.

(iii) Man zeige, dass $C(V_+(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a})$ für alle homogenen Ideale $\mathfrak{a} \subseteq R$ mit $\mathfrak{a} \neq R_+$ gilt.

(iv) Man zeige, dass $V_+(\mathfrak{a}) = p(V(\mathfrak{a}))$ für alle homogenen Ideale $\mathfrak{a} \subseteq R$ mit $\mathfrak{a} \neq R_+$ gilt.

(v) Man folgere, dass die Zuordnungen

$$\{\mathfrak{a} \subseteq R \text{ homogenes Radikalideal } \mid \mathfrak{a} \neq R_+\} \leftrightarrow \{Z \subseteq \mathbb{P}^n \text{ abgeschlossen }\}$$

gegeben durch

$$\mathfrak{a} \mapsto V_+(\mathfrak{a}) \text{ und } Z \mapsto I_+(Z)$$

invers zueinander sind.

## Aufgabe 2:

Wir definieren die Standard-Überdeckung des $\mathbb{P}^n$ durch

$$U_i := \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$$

für alle $0 \leq i \leq n$. Es sei $t\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ gegeben durch

$$[x_0 : x_1] \mapsto [x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3].$$

(i) Man zeige, dass $t$ eine wohldefinierte injektive Abbildung ist.

(ii) Man zeige, dass $\operatorname{im}(t)$ eine (Zariski-)abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{P}^3$ ist.

(iii) Man zeige, dass $\operatorname{im}(t) \cap U_0$ homöomorph zu $C$ aus Aufgabe 3 von Übungsblatt 1 ist.

(iv) Man folgere, dass $\operatorname{im}(t)$ irreduzibel ist.

## Aufgabe 3:

Es sei $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ eine quasi-projektive Varietät.

(i) Es sei $\mathcal{F} = \{f_0, \dots, f_m\} \subseteq k[T_0, \dots, T_n]$ eine Familie homogener Polynome vom selben Grad, sodass es für alle $y = (y_0 : \dots : y_n) \in Y$ ein $j \in \{1, \dots, m\}$ mit $f_j(y) \neq 0$ gibt. Man zeige, dass die Abbildung

$$h_{\mathcal{F}}\colon Y \to \mathbb{P}^m \text{ gegeben durch } y \mapsto (f_0(y) : \dots : f_m(y))$$

ein Morphismus von Varietäten ist.

(ii) Es sei $\mathcal{G} = \{g_0, \dots, g_m\} \subseteq k[T_0, \dots, T_n]$ eine weitere Familie homogener Polynome wie in (i). Man zeige, dass genau dann $h_{\mathcal{F}} = h_{\mathcal{G}}$ gilt, wenn $f_i(y)g_j(y) = f_j(y)g_i(y)$ für alle $y \in Y$ und $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

(iii) Es sei $h\colon Y \to \mathbb{P}^n$ ein Morphismus von Prävarietäten. Man zeige, dass es zu jedem $y \in Y$ eine offene Umgebung $U \subseteq Y$ von $y$ gibt, sodass $h|_U = h_{\mathcal{F}}$ gilt für eine Familie homogener Polynome $\mathcal{F} \subseteq k[T_0, \dots, T_n]$ wie in (i).

## Aufgabe 4:

Es seien $1 \leq d \leq r$ natürliche Zahlen. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Gr}(r,d)$ die Menge aller $d$-dimensionalen Untervektorräume des $k^r$. Für eine $d$-elementige Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, r\}$ und $M = (x_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{d\times r}(k)$ definieren wir $M_I := (x_{i,j})_{1\leq i\leq d, j\in I} \in \mathrm{Mat}_{d\times d}(k)$ und damit

$$U_I := \left\{ V \subseteq k^r \text{ Untervektorraum } \mid k^r = V \oplus \bigoplus_{j\in\{1,\dots,r\}\setminus I} k\cdot e_j \right\} \subseteq \mathrm{Gr}(r,d).$$

(i) Man zeige, dass

$$\mathrm{Gr}(r,d) = \bigcup_{I\subseteq\{1,\dots,r\}, \#I=d} U_I$$

gilt und dass die Abbildung

$$\varphi_I\colon \{M \in \mathrm{Mat}_{d\times r}(k) \mid M_I = E_d\} \to U_I,$$

die eine Matrix $M$ auf den von den Spaltenvektoren erzeugten Unterraum abbildet, eine Bijektion ist.

(ii) Es seien $I, J \subseteq \{1, \dots, r\}$ zwei $d$-elementige Teilmengen. Betrachte

$$\{M \in \mathrm{Mat}_{d\times r}(k) \mid M_I = E_d\}$$

als affinen Raum $\mathbb{A}^{d(r-d)}$ der Dimension $d(r-d)$. Man zeige, dass das Urbild $\varphi_I^{-1}(U_I \cap U_J) \subseteq \mathbb{A}^{d(r-d)}$ offen ist und dass es einen kanonischen Isomorphimus $\theta_{I,J}$ von Varietäten gibt, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\varphi_I^{-1}(U_I\cap U_J) \arrow[rr, "\theta_{I,J}"] \arrow[dr, "\varphi_I"'] & & \varphi_J^{-1}(U_I\cap U_J) \arrow[dl, "\varphi_J"] \\
& U_I \cap U_J &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

(iii) Man konstruiere die Struktur einer (Prä-)Varietät auf $\mathrm{Gr}(r,d)$, sodass $U_I \subseteq \mathrm{Gr}(r,d)$ offen ist und $\varphi_I\colon \mathbb{A}^{d(r-d)} \to U_I$ ein Isomorphismus von Varietäten ist.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen