Prof. Dr. E. Hellmann
Mark Feldmann SoSe 2018

Lineare Algebraische Gruppen
Blatt 5
Abgabe: 30.05.2018

Es sei im Folgenden k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1:

Es seien $1 \leq d \leq r$ natürliche Zahlen, $N := \binom{r}{d} - 1$ und wir nennen die Abbildung

$$\iota\colon \mathrm{Gr}(r,d) \to \mathrm{Gr}(1, \bigwedge^d(k^r)) = \mathbb{P}^N \text{ gegeben durch } V = \langle v_1, \dots v_d\rangle \mapsto k \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_d)$$

die Plücker-Einbettung.

(i) Man zeige, dass ι einen (wohldefinierten) Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Untervarietät des $\mathbb{P}^N$ induziert. Dazu gehe man wie folgt vor:
 (a) Man verwende Aufgabe 2, um zu zeigen, dass ι injektiv ist.
 (b) Man verwende die offene affine Überdeckung von $\mathrm{Gr}(r,d)$ aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 4, um zu zeigen, dass das Bild von ι abgeschlossen ist.

(ii) Es sei $x \in \mathrm{Gr}(r,d)$ und $U \subseteq \mathrm{Gr}(r,d)$ eine offene Umgebung von x. Man zeige, dass es zu jedem $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}(r,d)}(U)$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{P}^N$ von $\iota(x)$ mit $\iota^{-1}(V) \subseteq U$ und ein $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(V)$ gibt, sodass $g \circ \iota|_{\iota^{-1}(V)} = f|_{\iota^{-1}(V)}$ gilt.

Aufgabe 2:

Es sei $1 \leq d \leq r$, V ein r-dimensionaler k-Vektorraum und $\bigwedge^d(V)$ bezeichne die d-fache äußere Potenz. Wir nennen $0 \neq x \in \bigwedge^d(V)$ total zerlegbar, falls es $v_1, \dots, v_d \in V$ gibt, sodass $x = v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ gilt. Es sei nun $0 \neq x \in \bigwedge^d(V)$ beliebig und

$$\varphi_x\colon V \to \bigwedge^{d+1}(V) \text{ gegeben durch } v \mapsto v \wedge x.$$

Man zeige, dass $\dim(\ker(\varphi_x)) \leq d$ gilt und dass genau dann Gleichheit vorliegt, wenn x total zerlegbar ist. Falls $x = v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ für $v_1, \dots, v_d \in V$ gilt, so ist $\ker(\varphi_x) = \langle v_1, \dots, v_d\rangle$.

Aufgabe 3:

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{char}(k) \neq 2$ und

$$O(n) := \{X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(k) \mid X^t X = E_n = X X^t\}$$

die orthogonale Gruppe und

$$SO(n) := \{X \in O(n) \mid \det(X) = 1\}$$

die sogenannte spezielle orthogonale Gruppe.

(i) Man zeige, dass $O(n)$ und $SO(n)$ lineare algebraische Gruppen sind.
(ii) Man zeige, dass $O(n)$ nicht irreduzibel ist.
(iii) Man zeige, dass $SO(n)$ irreduzibel ist und dementsprechend die Zusammenhangskomponente der Eins von $O(n)$ ist.

[Hinweis: Man betrachte die (irreduzible) Varietät der schiefsymmetrischen Matrizen. Man verwende die Cayley-Transformation $X \mapsto (X - E_n)(X + E_n)^{-1}$, um die Gruppe $SO(n)$ mit einer offenen Teilmenge der schiefsymmetrischen Matrizen zu identifizieren.]

Aufgabe 4:

(i) Man bestimme alle Homorphismen algebraischer Gruppen von $\mathbb{G}_a$ nach $\mathbb{G}_m$.
(ii) Man bestimme alle Homorphismen algebraischer Gruppen von $\mathbb{G}_m$ nach $\mathbb{G}_a$.
(iii) Man bestimme alle Automorphismen algebraischer Gruppen von $\mathbb{G}_a$.
(iv) Man bestimme alle Automorphismen algebraischer Gruppen von $\mathbb{G}_m$.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen