Prof. Dr. E. Hellmann
Mark Feldmann SoSe 2018

Lineare Algebraische Gruppen
Blatt 6
Abgabe: 06.06.2018

Es sei im Folgenden k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1:

Es sei G eine algebraische Gruppe und X eine G-Varietät.

(i) Es sei $Y \subset X$ eine G-invariante Teilmenge von X (d.h. $g.y \in Y$ für alle $y \in Y$ und $g \in G$). Man zeige, dass Y die Vereinigung aller Bahnen $G.y$ mit $y \in Y$ ist.

(ii) Es sei $x \in X$. Man zeige, dass $G.x$ offen in $\overline{G.x}$ ist.

(iii) Man zeige, dass es ein $x \in X$ gibt, sodass $G.x \subseteq X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 2:

Es seien $1 \leq d \leq r$ natürliche Zahlen. Wir definieren den Morphismus

$$\mathrm{GL}_r \times \mathrm{Gr}(r,d) \to \mathrm{Gr}(r,d) \text{ durch } (g, M) \mapsto g(M).$$

Zudem sei $\mathcal{B}_r \subseteq \mathrm{GL}_r$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen und $\mathcal{U}_r \subseteq \mathcal{B}_r$ die Untergruppe der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen.

(i) Man zeige, dass dieser Morphismus wohldefiniert ist und $\mathrm{Gr}(r,d)$ zu einer GL_r-Varietät macht.

(ii) Man bestimme alle Bahnen
  (a) der GL_r-Varietät $\mathrm{Gr}(r,d)$.
  (b) der $\mathcal{B}_r$-Varietät $\mathbb{P}^{r-1} = \mathrm{Gr}(r,1)$.
  (c) der $\mathcal{U}_r$-Varietät $\mathbb{P}^{r-1} = \mathrm{Gr}(r,1)$.

Aufgabe 3:

Es sei G eine affine algebraische Gruppe und X eine affine G-Varietät. Man zeige, dass es eine Darstellung

$$r\colon G \to \mathrm{GL}_n,$$

ein $r(G)$-stabiles Ideal $I \subseteq k[T_1, \dots, T_n]$ sowie einen G-äquivarianten Isomorphismus

$$X \xrightarrow{\sim} V(I) \subseteq \mathbb{A}^n$$

gibt.

Aufgabe 4:

Es sei G eine affine algebraische Gruppe.

(i) Man zeige, dass die Teilmenge der unipotenten Elemente in G abgeschlossen in G ist.

(ii) Man zeige, dass die Teilmenge der unipotenten Elemente in G im Allgemeinen keine Untergruppe von G ist.

(iii) Man zeige, dass die Teilmenge der halbeinfachen Elemente in G im Allgemeinen weder abgeschlossen ist, noch eine Untergruppe definiert.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen