Prof. Dr. E. Hellmann
Mark Feldmann SoSe 2018

Lineare Algebraische Gruppen
Blatt 7
Abgabe: 13.06.2018

Es sei im Folgenden k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1:

Es sei T ein Torus, $X^*(T)$ die zugehörige Charaktergruppe, $X_*(T)$ die zugehörige Cocharaktergruppe und $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon X \times Y \to \mathbb{Z}$ die perfekte Paarung, sodass $\chi(\lambda(a)) = a^{\langle \chi, \lambda \rangle}$ für alle $a \in \mathbb{G}_m, \chi \in X$ und $\lambda \in Y$ gilt.

(i) Es sei V eine affine T-Varietät und $\chi \in X^*(T)$, wir setzen

$$\mathcal{O}_V(V)_\chi := \{f \in \mathcal{O}_V(V) \mid t.f = \chi(t)f \text{ für all } t \in T\}$$

wobei $(t.f)(v) = f(t^{-1}v)$ für alle $t \in T$, $f \in \mathcal{O}_V(V)$ und $v \in V$. Man zeige, dass

$$\mathcal{O}_V(V) = \bigoplus_{\chi \in X^*(T)} \mathcal{O}_V(V)_\chi$$

gilt, sowie $\mathcal{O}_V(V)_{\chi_1}\mathcal{O}_V(V)_{\chi_2} \subseteq \mathcal{O}_V(V)_{\chi_1+\chi_2}$ für $\chi_1, \chi_2 \in X^*(T)$.

(ii) Es sei V eine affine Varietät, sodass $\mathcal{O}_V(V)$ in eine direkte Summe

$$\mathcal{O}_V(V) = \bigoplus_{\chi \in X^*(T)} \mathcal{O}_V(V)_\chi$$

zerfällt, sodass $\mathcal{O}_V(V)_{\chi_1}\mathcal{O}_V(V)_{\chi_2} \subseteq \mathcal{O}_V(V)_{\chi_1+\chi_2}$ für alle $\chi_1, \chi_2 \in X^*(T)$ gilt. Man zeige, dass V eine T-Varietät ist.

Aufgabe 2:

Es sei $\Phi\colon \mathbb{G}_m \to Z$ ein Morphismus von Varietäten. Wir sagen, dass $\lim_{a \to 0} \Phi(a)$ existiert, falls eine Fortsetzung $\hat{\Phi}\colon \mathbb{A}^1 \to Z$ von Φ gibt, die ein Morphismus von Varietäten ist. Dementsprechend existiere $\lim_{a \to \infty} \Phi(a)$, falls $\lim_{a \to 0} \Phi'(a)$ existiert, wobei Φ' gegeben sei durch $\Phi'(a) = \Phi(a^{-1})$ für alle $a \in \mathbb{G}_m$. Es sei T ein Torus und V eine T-Varietät. Für $\lambda \in X_*(T)$ setzen wir

$$V(\lambda) := \{v \in V \mid \lim_{a \to 0} \lambda(a).v \text{ existiert}\}.$$

(i) Man zeige, dass $V(-\lambda) := \{v \in V \mid \lim_{a \to \infty} \lambda(a).v \text{ existiert}\}$ gilt.

(ii) Man zeige, dass $V(\lambda)$ eine abgeschlossene Teilmenge von V ist, falls V affin ist.

(iii) Man zeige, dass $V(\lambda) \cap V(-\lambda) = \{v \in V \mid \lambda(a).v = v \text{ für alle } a \in \mathbb{G}_m\}$ gilt, falls V affin ist.

(iv) Man geben ein Gegenbeispiel zu (iii) an für den Fall, dass V nicht affin ist.

Aufgabe 3:

Es sei $\lambda\colon \mathbb{G}_m \to \mathrm{GL}_n$ ein Cocharakter. Dann operiert $\mathbb{G}_m$ auf GL_n via $a.x := \lambda(a)x\lambda(a)^{-1}$ für alle $a \in \mathbb{G}_m$ und $x \in \mathrm{GL}_n$. Wir definieren

$$P(\lambda) := \{x \in G \mid \lim_{a \to 0} a.x \text{ existiert}\}$$

analog zu Aufgabe 2. Man bestimme $P(\lambda) \cap P(-\lambda)$ für alle $\lambda \in X_*(\mathrm{GL}_n)$.

Aufgabe 4:

Es sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der K-Varietäten, $\mathcal{S}$ die Kategorie der Mengen und $h_{(\cdot)}\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$ der (volltreue) Yoneda-Funktor. Zudem sei A eine reduzierte k-Algebra vom endlichen Typ über k und Y die zugehörige affine k-Varietät. Wir definieren die Menge $\mathcal{F}(Y)$ als

$$\{V \subseteq A^n \mid V \text{ lokal freier } A\text{-Modul vom Rang 1 und } A^n/V \text{ ist flach über } A\}.$$

(i) Man zeige, dass es eine Bijektion

$$h_{\mathbb{P}^{n-1}}(Y) \cong \mathcal{F}(Y)$$

gibt.

(ii) Es sei B eine weitere reduzierte k-Algebra vom endlichen Typ über K und Z die zugehörige affine k-Varietät sowie $f\colon Y \to Z$ ein Morphismus von Varietäten. Man gebe eine Abbildung $\mathcal{F}(f)$ an, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} h_{\mathbb{P}^{n-1}}(Z) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "h_{\mathbb{P}^{n-1}}(f)"'] & \mathcal{F}(Z) \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"] \\ h_{\mathbb{P}^{n-1}}(Y) \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{F}(Y) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen