Prof. Dr. E. Hellmann
Mark Feldmann SoSe 2018

Lineare Algebraische Gruppen
Blatt 8
Abgabe: 20.06.2018

Es sei im Folgenden k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1: Es sei X eine affine Varietät, $k[\varepsilon] := k[T]/(T^2)$ der Ring der dualen Zahlen und $\varepsilon := T + (T^2) \in k[\varepsilon]$. Man zeige, dass es einen Isomorphismus von k-Vektorräumen

$$T_xX \cong \{f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(X), k[\varepsilon]) \mid f(\mathfrak{m}_x) \subseteq \varepsilon k[\varepsilon]\}$$

gibt, wobei die Vektorraumstruktur auf der rechten Seite wie folgt gegeben sei: wir können jedes Element f (bzw. g) schreiben als $f = f_0 + f_1 \cdot \varepsilon$ (bzw. $g = g_0 + g_1 \cdot \varepsilon$) und definieren

$$(\lambda.f)(a) := f_0(a) + \lambda f_1(a)\varepsilon \text{ für } \lambda \in k \text{ und } a \in \mathcal{O}_X(X)$$

sowie

$$(f+g)(a) := f_0(a) + (f_1(a) + g_1(a)) \cdot \varepsilon \text{ für } a \in \mathcal{O}_X(X).$$

Aufgabe 2:

(i) Man bestimme die singulären Punkte von $V(T_1T_2^2 - T_3^2) \subseteq \mathbb{A}^3$.
(ii) Man bestimme die singulären Punkte von $V(T_1^3 + T_2^3 + T_1T_2) \subseteq \mathbb{A}^3$.
(iii) Es sei $f \in k[T_1, \dots, T_n]$ ein Polynom. Man bestimme die singulären Punkte von $V(fT_{n+1} - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$.

Aufgabe 3:
Es sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine irreduzible affine Varietät.

(i) Man zeige, dass die Menge $\mathrm{Sing}(X)$ der singulären Punkte in X eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.
(ii) Man zeige, dass $\mathrm{Sing}(X) \subsetneq X$ gilt, falls $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$ (für ein irreduzibles $f \in k[T_1, \dots, T_n]$) eine Hyperebene ist.

Aufgabe 4:
Es sei $\mathrm{SL}_n = V(\det -1) \subseteq \mathrm{GL}_n$ die Untergruppe der invertierbaren Matrizen mit Determinante 1 und $\mathrm{O}_n \subseteq \mathrm{GL}_n$ die Untergruppe der orthogonalen Matrizen. Zudem definieren wir die symplektische Gruppe als die Untergruppe

$$\mathrm{Sp}_{2n} := \{A \in \mathrm{GL}_{2n} \mid A^T X_n A = X_n\} \subseteq \mathrm{GL}_{2n},$$

wobei

$$X_n := \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$$

gelte.

(i) Man zeige, dass $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_n) \cong \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\} \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n)$ gilt.
(ii) Man zeige, dass $\mathrm{Lie}(\mathrm{O}_n) \cong \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n) \mid A^T = -A\} \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n)$ gilt.
(iii) Man zeige, dass $\mathrm{Lie}(\mathrm{Sp}_{2n}) \cong \{A \in \mathrm{Mat}(2n \times 2n) \mid X_nA + A^TX_n = 0\} \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_{2n})$ gilt.