Prof. Dr. E. Hellmann
Mark Feldmann SoSe 2018

Lineare Algebraische Gruppen
Blatt 9
Abgabe: 27.06.2018

Es sei im Folgenden k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1: Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, G eine affine algebraische Gruppe und $\Phi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ ein Morphismus von Varietäten. Wir definieren den Morphismus

$$\Lambda^h(\Phi)\colon G \to \mathrm{GL}(\Lambda^h V)$$

durch $\Lambda^h(\Phi)(g)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_h) := \Phi(g)v_1 \wedge \cdots \wedge \Phi(g)v_h$ für alle $v_1, \ldots, v_h \in V$ und $g \in G$. Man zeige, dass der induzierte Homomorphismus

$$d(\Lambda^h(\Phi))\colon \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(\Lambda^h V)) \cong \mathrm{End}(\Lambda^h V)$$

von Lie-Algebren gegeben ist durch

$$d(\Lambda^h(\Phi))(X)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_h) = \sum_{i=1}^{h} v_1 \wedge \cdots \wedge (d\Phi)(X)(v_i) \wedge \cdots \wedge v_h$$

für alle $v_1, \ldots, v_h \in V$ und $X \in \mathrm{Lie}(G)$.

Aufgabe 2: Es sei G eine affine algebraische Gruppe und $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ die zugehörige Lie-Algebra. Wir nennen

$$\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}),\ g \mapsto \mathrm{Ad}_g := d\psi_g$$

die adjungierte Darstellung, wobei $\psi_g\colon G \to \mathrm{Aut}(G)$ gegeben ist durhc $\psi_g(h) = ghg^{-1}$ für alle $h \in G$. Man zeige, dass $d\mathrm{Ad}(X)(Y) = [X, Y]$ gilt für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Aufgabe 3: Es sei K ein Körper und $K(x)/K$ eine Körpererweiterung, die von einem Element erzeugt wird.

(i) Man zeige, dass $\dim(\Omega_{K(x)/K}) \leq 1$ gilt.
(ii) Man zeige, dass genau dann $\dim(\Omega_{K(x)/K}) = 0$ gilt, wenn $K(x)/K$ endlich und separabel ist.

Aufgabe 4:

(i) Es gelte $\mathrm{char}(k) \neq 2$ und es sei $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ nicht konstant und quadratfrei, d.h. dass in der Primfaktorzerlegung von f jeder Primfaktor maximal einmal auftritt. Man zeige, dass der Ring

$$A := k[T_1, \ldots, T_n, X]/(X^2 - f)$$

ein ganzabgeschlossener Integritätsbereich ist.
[Hinweis: Man betrachte die Körpererweiterung $k(T_1, \ldots, T_n)[X]/(X^2 - f)$ und gebe das Minimalpolynome eines beliebigen Elementes über $k(T_1, \ldots, T_n)$ an.]
(ii) Man geben eine affine Varietät der Dimension 2 an, die normal aber nicht glatt ist.