Prof. Dr. E. Hellmann WS 2017/18

**Seminar: "Cours d'arithmétique, I"**

Das Seminar folgt Serre's Buch *Cours d'arithmétique*, bzw. der englischen Übersetzung [3]. Bei Bedarf kann auch auf die entsprechenden Kapitel von [1] oder [2] zurückgegriffen werden. Hauptquelle sollte aber immer das Buch von Serre bleiben!

Bei Bedarf und Interesse können noch Vorträge über Galois-Kohomologie und die kohomologische Formulierung des Hasse-Prinzips angeschlossen werden.

1) **Endliche Körper I**
[3, I,§1-2] Grundlegende Eigenschaften endlicher Körper. Die multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers. Der Satz von Chevalley-Warning.

2) **Endliche Körper II**
[3, I,§3] Das Legendre Symbol. Quadratisches Reziprozitätsgesetz.

3) **Lokale Körper I**
[3, II,§1-2.1] Definitionen und erste Eigenschaften von $\mathbb{Z}_p$ und $\mathbb{Q}_p$ (eventuell können mehr Details zu inversen Limiten und vollständigen diskreten Bewertungsringen gegeben werden). Gleichungen über den $p$-adischen Zahlen.

4) **Lokale Körper II**
[3, II,§2.2-3] Approximation von Lösungen von Gleichungen. Struktur der multplikativen Gruppe von $\mathbb{Q}_p$.

5) **Lokales Hilbertsymbol**
[3, III,§1] Definition des lokalen Hilbertsymbols. Eigenschaften. Berechnung des Hilbertsymbols via des Legendre Symbols. Das Hilbertsymbol ist eine nicht-degenerierte Bilinearform.

6) **Globales Hilbertsymbol**
[3, III,§2] Definition des globalen Hilbertsymbols. Eigenschaften: Produktformel, Existenz rationaler Zahlen mit gegebenem Hilbertsymbol (ohne den Beweis von Lemma 3).

7) **Quadratische Formen**
[3, IV,§1] Quadratische Formen und ihr Zusammenhang nit Bilinearformen. Isotrope Vektoren. Der Satz von Witt. Insbesondere auch die Resultate in §1.6 (aber ohne §1.7).
[3, IV,§2.4] Quadratische Formen über $\mathbb{R}$.

8) **Quadratische Formen über $\mathbb{Q}_p$**
[3, IV, §1.7] Quadratische Formen über endlichen Körpern. [3, IV, §2.1-2.3] Invarianten von quadratischen Formen über $\mathbb{Q}_p$. Klassifikation.

9) **Der Satz von Hasse-Minkowski**
[3, IV, §3.1-3.2] Invarianten von quadratischen Formen über $\mathbb{Q}$. Der Satz von Hasse-Minkowski (Theorem 8). [3, IV, §3.3] Klassifikation von quadratischen Formen über $\mathbb{Q}$.
[3, IV, Appendix] Anwendung: Der Vier-Quadrate-Satz.

10) **Quadratische Formen über $\mathbb{Z}$, I**
$[V, \S1, 2.1]$ Quadratische Formen mit Diskriminante $\pm1$, insbesondere auch die Beispiele in §1.4. Definition der Gruppe $K(S)$ und ihre Eigenschaften §2.1 (ohne den Beweis von Theorem 1)

11) **Quadratische Formen über $\mathbb{Z}$, II**
Strukturresultate im indefiniten und definiten Fall [$V$, §2.2, 2.3] mit Beweisen §3.

## References

[1] J.W.S. Cassels: *Rational quadratic forms*, Academic press, 1978.
[2] S. Müller-Stach, J. Piontkowski: *Elementare und algebraische Zahlentheorie*, Vieweg+Teubner, 2011.
[3] J.-P. Serre: *A Course in Arithmetic*, Graduate Texts in Mathematics **7**, Springer.