

**Seminar über Dieudonné-Theorie**

Dienstags 13.30h-15h, Ort: M B 6 (M 6), Einsteinstraße 64  
Vorbesprechung in der ersten Semesterwoche, Dienstag den 18.10.2016

Dieudonné-Theorie befasst sich mit der Klassifikation sogenannter  $p$ -divisibler Gruppen über Körpern der Charakteristik  $p$ . Diese  $p$ -divisiblen Gruppen sind geometrische Objekte, die zum Beispiel eine wichtige Rolle beim Studium elliptischer Kurven (oder allgemeiner: abelscher Varietäten) spielen. Über einem perfekten Körper  $k$  der Charakteristik  $p$  können diese Gruppen mittels Objekten der semi-linearen Algebra, sogenannten Dieudonné-Moduln, beschrieben werden. Ein Dieudonné-Modul ist ein endlicher freier Modul  $M$  über einem Ring  $W = W(k)$  zusammen mit einer Abbildung  $F : M \rightarrow M$ , die semi-linear bezüglich eines Ringendomorphismus  $\sigma : W \rightarrow W$  ist (und gewisse Zusatzbedingungen erfüllt). Ist der Grundkörper  $k$  algebraisch abgeschlossen, können Dieudonné-Moduln (oder genauer Isogenieklassen von Dieudonné-Moduln) sehr einfach klassifiziert werden.

In diesem Seminar wollen wir die zunächst die Kategorie der Dieudonné-Moduln und ihre Klassifikation studieren. Im zweiten Teil des Seminars soll es dann um  $p$ -divisible Gruppen und um den Zusammenhang mit Dieudonné-Moduln gehen. Die Objekte die wir im Seminar kennenlernen werden spielen in vielen Bereichen der arithmetischen Geometrie, wie etwa der Theorie der abelschen Varietäten und ihrer Modulräume aber auch in der Theorie der  $p$ -adischen Galoisdarstellungen, eine wichtige Rolle.

**Voraussetzungen:** Das Seminar richtet sich an Mathematikstudenten ab dem ersten Mastersemester. Gute Kenntnisse in kommutativer Algebra werden vorausgesetzt. Für den zweiten Teil des Seminars ist es sehr hilfreich (aber nicht unbedingt notwendig) über einige Vorkenntnisse in algebraischer Geometrie zu verfügen.

**Beschreibung der Vorträge:**

Der erste Teil des Seminars (über die Klassifikation von Dieudonné-Moduln) folgt im wesentlichen den entsprechenden Kapiteln im Buch von Zink [5]. Im zweiten Teil ist die Hauptquelle das Buch von Demazure [1].

**1) Unverzweigte Erweiterungen und Wittvektoren:**

Erinnerung an diskrete Bewertungsringe und unverzweigte Erweiterungen (z.B. [4, I, §1 und II, §1] und loc. cit. S. 14). Beweise [4, II, Proposition 3]. Definiere das Newton-Polygon eines Polynoms und erwähne den Zusammenhang der Anstiege des Newton-Polygons und der Bewertungen der Nullstellen.

Beschreibe den Ring der Wittvektoren [4, II, §6]. Beweise insbesondere Theorem 7 und Theorem 8 und die universelle Eigenschaft der Wittvektoren (z.B. [1, S. 58, Proposition]). Siehe auch [1, III, 1-3], [3, I, 5-6] und [5, IV, §6-7].

## 2) Dieudonné-Moduln und Isokristalle:

Definiere die Kategorien der Dieudonné-Moduln und Isokristalle über einem perfekten Körper der Charakteristik  $p$  [5, VI, §1] und [1, IV.2] (ein Dieudonné-Modul ist in Zinks Sprechweise ein  $\sigma^{-1}$  Kristall  $(M, V)$ , der  $pM \subset VM$  erfüllt; Demazure nennt Isokristalle  $F$ -spaces). Beispiele: die irreduziblen Objekte  $E^\lambda$  [1, IV.3]. Definiere den Newton-Anstieg eines Isokristalls [5, §2].

## 3) Klassifikation über einem perfekten Körper:

Beweise die Zerlegung in isokline Isokristalle [5, VI, Satz 6.22] und definiere das Newton-Polygon eines Isokristalls. Beweise [1, S.90 Theorem] über den Anstieg eines Isokristalls über einem endlichen Körper. Diskutiere das Beispiel von Gross über Unterscheid zwischen dem Newton-Polygon eines Isokristalls und dem Newton-Polygon eines charakteristischen Polynoms.

## 4) Klassifikation über einem algebraisch abgeschlossenen Körper:

Beweise den Satz von Dieudonné-Manin [5, VI, 4§] und [1, IV.4].

## 5) Affine Schemata und affine Gruppenschemata:

Erinner an den Begriff eines affinen  $k$ -Schemata (z.B. [1, I.1-5]). Definiere konstante und étale Schemata [1, I.8] und den Frobenius [1, I.9]. Affine Gruppenschemata und Hopf-Algebren [1, II.1-6] (ohne Cartier-Dualität; wir verzichten auf die Aussagen über formale Gruppen).

## 6) Multiplikative, unipotente und étale Gruppenschemata:

Cartier-Dualität [1, I.4], étale, multiplikative und unipotente Gruppenschemata [1, I.7-9] (ohne den Fall formaler Gruppen).

## 7) Dieudonné-Moduln und unipotente Gruppenschemata:

Der Zusammenhang von unipotenten Gruppenschemata und Dieudonné-Moduln [1, III.4-5].

## 8) Dieudonné-Moduln und endliche kommutative Gruppenschemata:

Der Zusammenhang von  $p$ -torsions Gruppenschemata und Dieudonné-Moduln [1, III.6].

## 9) Klassifikation $p$ -divisibler Gruppen:

Führe  $p$ -divisible Gruppen ein [1, II.11] (wir benutzen die "alternative" Definition). Diskutiere dann die Kategorienäquivalenz in [1, III.8].

## REFERENCES

- [1] M. Demazure, *Lectures on  $p$ -Divisible Groups*, Lecture Notes in Mathematics **302**, Springer (<http://link.springer.com/book/10.1007/9783540060741>).
- [2] U. Görtz, T. Wedhorn, *Algebraic Geometry I*, Adv. Lectures in Math., Vieweg+Teubner.
- [3] P. Schneider, *Die Theorie des Anstieges*, Vorlesungsnotizen unter <http://wwwmath.uni-muenster.de/u/pschnei/publ/lectnotes/Theorie-des-Anstiegs.pdf>.
- [4] J.P. Serre, *Local fields*, Graduate Texts in Mathematics **67**, Springer.
- [5] T. Zink, *Cartiertheorie kommutativer formaler Gruppen*, Teubner-Texte zur Mathematik **68**, Teubner Verlag. Englische Version unter <https://perso.univ-rennes1.fr/matthieu.romagny/articles/zink.pdf> verfügbar.