Prof. Dr. E. Hellmann WS 2016/17

Deformationtheorie
und Deformationen von Galoisdarstellungen

Blatt 1

Abgabe: 04.11.2016

Aufgabe 1:

Sei k ein Körper und $\mathcal{C}$ die Kategorie der vollständigen lokalen noetherschen k-Algebren mit Restklassenkörper k. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass beliebige Faserprodukte in $\mathcal{C}$ nicht existieren. Gegeben sei das Diagramm

$$A = k[\![X,Y]\!] \xrightarrow{\alpha} C = k[\![X]\!] \xleftarrow{\beta} B = k$$

wobei $\alpha(X) = X$ und $\alpha(Y) = 0$ gilt. Es bezeichne D das Faserprodukt von A und B über C in der Kategorie der Ringe.

(i) Zeigen Sie, dass D ein lokaler Ring mit maximalen Ideal $\mathfrak{m} = Yk[\![X,Y]\!]$ ist

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ein unendlich dimensionaler k-Vektorraum ist.

(iii) Folgern Sie, dass D nicht noethersch ist.

(iv) Nehmen Sie an, dass das Faserprodukt $A \times_C B$ in $\mathcal{C}$ existiert.
Zeigen Sie, dass dann $A \times_C B = D = k + \mathfrak{m}$ gelten muss.
(*Hinweis: Sei* $(R, \mathfrak{n})$ *ein Objekt in* $\mathcal{C}$, *dann gilt* $\mathrm{Hom}(k[\![T]\!], R) = \mathfrak{n}$)

Aufgabe 2:

Zeigen Sie:

(i) $\lim\limits_{\leftarrow m} k[t_1, \ldots, t_n]/(t_1, \ldots, t_n)^m = k[\![t_1, \ldots, t_n]\!]$.

(ii) $\lim\limits_{\leftarrow m} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \prod_{p \text{ prim}} \mathbb{Z}_p$, wobei $m_1 \preceq m_2 \Leftrightarrow m_1 | m_2$.

(ii) $\lim\limits_{\leftarrow m} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[T] = \mathbb{Z}_p\langle T \rangle := \big\{ \sum_{i \geq 0} a_i T^i \in \mathbb{Z}_p[\![T]\!] | a_i \to 0 \text{ in } \mathbb{Z}_p \big\}$.

Aufgabe 3:

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie in der Faserprodukte existieren. Sei $F : \mathcal{C} \to$ (Mengen) ein pro-darstellbarer Funktor. Zeigen Sie, dass F mit Faserprodukten vertauscht, Mit anderen worten: zeigen, Sie dass für alle Diagramme

$$X \longrightarrow S \longleftarrow Y$$

in $\mathcal{C}$ die kanonische Abbildung

$$F(X \times_S Y) \longrightarrow F(X) \times_{F(S)} F(Y)$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4:

Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der Artinschen lokalen $\mathbb{Z}_p$-Algebren mit Restklassenkörper $\mathbb{F}_p$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ äquivalent zur Kategorie $\hat{\mathcal{C}}$ ist, deren Objekte die lokalen, vollständigen topologischen $\mathbb{Z}_p$-Algebren R sind, die eine Umgebungsbasis der 0 aus offenen Idealen $I_i \subset R$ besitzen, so dass R/I_i Artinsch ist, und deren Morphismen stetige $\mathbb{Z}_p$-Algebrenhomomorphismen sind.

Homepage: `www.wwu.de/IVV5WS/WebHop/user/hellmane/VorlesungWS16`

Prof. Dr. E. Hellmann WS 2016/17

Deformationtheorie
und Deformationen von Galoisdarstellungen

Blatt 2

Abgabe: 11.11.2016

Aufgabe 1:
Sei $(G_i, \varphi_{i,j})$ in filtriertes projektives System von Gruppen, sodass die Transitionsabbildungen $\varphi_{i,j} : G_i \to G_j$ surjektiv sind. Zeige, dass die kanonischen Projektionen

$$\varphi_j : \varprojlim G_i \longrightarrow G_j$$

surjektiv sind.

Aufgabe 2:
Sei $(M_i, \varphi_{i,j})_{i\in\mathbb{N}}$ ein projektives System von R-Moduln indiziert durch $\mathbb{N}$. Definiere:

$$\varprojlim{}^1 M_i = \operatorname{coker}\big(\prod_{i\in\mathbb{N}} M_i \xrightarrow{(\alpha_i)_i} \prod_{i\in\mathbb{N}} M_i\big).$$

wobei $\alpha_i : M_i \to \prod_{j\in\mathbb{N}} M_j$ die Abbildung $\mathrm{id}_{M_i} - \varphi_{i,i-1}$ ist.

(i) Für alle $j \in \mathbb{N}$ sei die Kette der Unterobjekte $\varphi_{i,j}(M_i) \subset M_j$ stationär. Zeigen Sie

$$\varprojlim{}^1 M_i = 0.$$

(ii) Sei

$$0 \longrightarrow (M_i', \varphi_{i,j}')_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow (M_i, \varphi_{i,j})_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow (M_i'', \varphi_{i,j}'')_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von projektiven Systemen. Zeigen Sie, dass es eine exakte Sequenz

$$0 \to \varprojlim M_i' \to \varprojlim M_i \to \varprojlim M_i'' \to \varprojlim{}^1 M_i' \to \varprojlim{}^1 M_i \to \varprojlim{}^1 M_i'' \to 0$$

gibt.

Aufgabe 3:
Sei Λ ein vollständiger, lokaler, Noetherscher Ring mit Restklassenkörper k und sei $(A, \mathfrak{m})$ eine noethersche lokale Λ-Algebra mit Restklassenkörper k. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) Der Ring A ist ein Artinscher Ring.

(ii) Es gibt ein $n > 0$ sodass $\mathfrak{m}^n = 0$ gilt.

(iii) Der Ring A ist Artinsch als Λ-Modul.

Aufgabe 4:
Sei $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien in der endliche inverse Limiten existieren und sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) Der Funktor F vertauscht mit endlichen inversen Limiten.

(ii) Der Funktor F vertauscht mit endlichen Produkten und endlichen Faserproduckten.

(iii) Für jedes exakte Diagramm

$$X \longrightarrow X' \rightrightarrows X'' \tag{1}$$

ist das Diagramm

$$F(X) \longrightarrow F(X') \rightrightarrows F(X'')$$

exakt.

(Erinnerung: Das Diagramm (1) heißt exakt falls für alle Y in $\mathcal{C}$ das Diagramm

$$\mathrm{Hom}(Y, X) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}(Y, X') \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}(Y, X'')$$

exakt ist, d.h. falls die Abbildung α die Menge $\mathrm{Hom}(Y, X)$ mit der Teilmenge $\{f|\beta(f) = \gamma(f)\}$ von $\mathrm{Hom}(Y, X')$ identifiziert.)

Homepage: `www.wwu.de/IVV5WS/WebHop/user/hellmane/VorlesungWS16`

Deformationtheorie
und Deformationen von Galoisdarstellungen

Blatt 3

Abgabe: 18.11.2016

Sei G eine pro-endliche Gruppe und sei Λ ein vollständiger lokaler Noetherscher Ring mit Restklassenkörper k. Wir definieren den *vervollständigten Gruppenring* von G mit Koeffizienten in Λ durch

$$\Lambda[\![G]\!] = \varprojlim \Lambda[G/H]$$

wobei der inverse Limes über alle offenen Untergruppen von G genommen wird.

Aufgabe 1:
Sei G eine pro-endliche abelsche Gruppe und Λ wie oben. Sei $\psi : G \to k^\times$ ein stetiger Charakter. Für eine offene Untergruppe $H \subset \Lambda$ sodass $H \subset \ker \psi$, definiert der durch ψ gegebene Homomorphismus $\Lambda[G/H] \to k$ ein eindeutig bestimmtes maximales Ideal $\mathfrak{m}_{\psi,H} \subset \Lambda[G/H]$. Zeigen Sie:

(i) Der Ring
$$R_\psi = \varprojlim \Lambda[G/H]_{\mathfrak{m}_{\psi,H}}$$
stellt den Deformationsfunktor $\mathcal{D}_\psi$ dar.

(ii) Der Ring R_ψ is Noethersch falls G topologisch endlich erzeugt ist.

Aufgabe 2:

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_p[\![\mathbb{Z}_p]\!] \cong \mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_p[\![\mathbb{Z}_p^\times]\!] \cong \prod_{i=1}^{p-1} \mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ gilt.

(iii) Beschreiben Sie alle stetigen Charaktere $\mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{F}_p^\times$, sowie die Ringe, die deren Deformationsfunktoren pro-darstellen.

Aufgabe 3:
Sei G eine endliche Gruppe und k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(k)$ eine irreduzible Darstellung. Zeigen Sie, dass der Deformationsfunktor $\mathcal{D}_\rho$ auf der Kategorie $\mathcal{C}_k$ von k dargestellt wird.

Homepage: `www.wwu.de/IVV5WS/WebHop/user/hellmane/VorlesungWS16`

Prof. Dr. E. Hellmann WS 2016/17

Deformationtheorie
und Deformationen von Galoisdarstellungen

Blatt 4

Abgabe: 25.11.2016

Es sei Λ ein vollständiger lokaler Noetherscher Ring mit Restklassenkörper k.

Aufgabe 1:
Sei $\varphi : R \to S$ ein Morphiums in $\hat{\mathcal{C}}_\Lambda$. Zeigen Sie, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn die induzierte Abbildung auf Kotangentialräumen $t_R^* \to t_S^*$ surjektiv ist.

Aufgabe 2:
Sei

$$F : \mathcal{C}_\Lambda \to (\text{Mengen})$$

ein Deformationsfunktor und sei V ein k-Vektorraum.

(i) Überprüfen Sie alle Vektorraumaxiome für die in der Vorlesung definierte Vektorraumstruktur auf $F(k[V])$.

(ii) Zeigen Sie, dass es einen kanonischen Isomorphismus

$$t_F \otimes_k V = F(k[\epsilon]) \otimes_k V \longrightarrow F(k[V])$$

gibt.

Aufgabe 3:
Sei G eine endliche Gruppe und $\bar{\rho} : G \to \mathrm{GL}_n(k)$ eine Darstellung. Zeigen Sie, dass der Tangentialraum $t_{\mathcal{D}_{\bar{\rho}}}$ des Deformationsfunktors $\mathcal{D}_{\bar{\rho}}$ isomorph zu $\mathrm{Ext}^1_G(\bar{\rho}, \bar{\rho})$ ist.

Aufgabe 4:
Sei X ein separiertes Schema von endlichem Typ über Λ und sei $\mathcal{L}_k$ ein Geradenbündel auf X_k. Zeigen Sie, dass der Tangentialraum $t_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_k}}$ des Deformationsfunktors $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_k}$ isomorph zu $H^1(X_k, \mathcal{O}_{X_k})$ ist.

Homepage: `www.wwu.de/IVV5WS/WebHop/user/hellmane/VorlesungWS16`

Prof. Dr. E. Hellmann WS 2016/17

Deformationtheorie
und Deformationen von Galoisdarstellungen

Blatt 5

Abgabe: 02.12.2016

Es sei Λ ein vollständiger lokaler Noetherscher Ring mit Restklassenkörper k.

Aufgabe 1:
Sei $F : \mathcal{C}_\Lambda \to$ (Mengen) ein Deformationsfunktor, der die Bedingung (H_2) erfüllt, und sei $\pi : A \to B$ ein kleiner Morphismus mit $I = \mathrm{Ker}(\pi)$. Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierte Abbildung

$$F(k[I]) \times F(A) \longrightarrow F(A)$$

gegeben durch $(v, \xi) \mapsto v + \xi$, die Bedingung $(v_1 + v_2) + \xi = v_1 + (v_2 + \xi)$ für $v_1, v_2 \in F(k[I])$ und $\xi \in F(A)$ erfüllt.

Aufgabe 2:
Sei $p : \Lambda[\![t_1, \dots, t_n]\!] \to R$ eine Surjektion in $\hat{\mathcal{C}}_\Lambda$, die einen Isomorphismus auf Tangentialräumen induziert, und sei $\ker(p) = \mathfrak{a}$. Sei $\pi : A \to B$ eine kleine Surjektion in $\mathcal{C}_\Lambda$ und sei $\ker(\pi) = I$.

(i) Sei $\varphi_B : R \to B$ ein Morphismus und sei $\tilde{\varphi} : S \to A$ ein Lift von $\varphi_B \circ p$. Zeigen Sie, dass $\tilde{\varphi}|_{\mathfrak{a}}$ einen Morphismus $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}_S\mathfrak{a} \to I$ induziert, der nur von φ_B abhängt. Man erhält also eine Abbildung
$$\mathrm{ob}_\pi : h_R(B) \longrightarrow (\mathfrak{a}/\mathfrak{m}_S\mathfrak{a})^* \otimes_k I = \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{a}/\mathfrak{m}_S\mathfrak{a}, I)$$

(ii) Zeigen Sie, dass ein Morphismus $\varphi_B \in h_R(B)$ genau dann zu einem Morphismus $\varphi_A \in h_R(A)$ liftet, falls das Bild von φ_B unter der Abbildung ob_π verschwindet.

(iii) Sei
$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"'] & A \arrow[d, "\pi"] \\ B' \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$
ein kommutatives Diagramm, wobei π und π' klein seien. Zeigen Sie, dass das kanonische Diagramm
$$\begin{tikzcd} h_R(B') \arrow[r, "\mathrm{ob}_{\pi'}"] \arrow[d] & (\mathfrak{a}/\mathfrak{m}_S\mathfrak{a})^* \otimes_k \ker(\pi') \arrow[d] \\ h_R(B) \arrow[r, "\mathrm{ob}_\pi"] & (\mathfrak{a}/\mathfrak{m}_S\mathfrak{a})^* \otimes_k \ker(\pi) \end{tikzcd}$$
kommutiert.

Aufgabe 3:

Sei X ein separiertes Schema von endlichem Typ über Λ. Sei $\pi : A \to B$ eine kleine Surjektion mit $\ker(\pi) = I$ und sei $\iota : X_B \hookrightarrow X_A$ die kanonische abgeschlossene Immersion mit Idealgarbe $\mathcal{I} = I\mathcal{O}_{X_A}$. Sei $\mathcal{L}_B \in \mathrm{Pic}(X_B) = H^1(X_B, \mathcal{O}_{X_B}^\times)$ eine Isomorphieklasse von Geradenbündel. Zeigen Sie, dass es genau dann eine Isomorphieklasse $\mathcal{L}_A$ von Geradenbündeln auf X_A mit $\iota^*\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_B$ gibt, falls das Bild von $\mathcal{L}_B$ unter der kanonischen Abbildung

$$H^1(X_B, \mathcal{O}_{X_B}^\times) \longrightarrow H^2(X_A, \mathcal{I}) \cong I \otimes_k H^2(X_k, \mathcal{O}_{X_k})$$

verschwindet.

Homepage: `www.wwu.de/IVV5WS/WebHop/user/hellmane/VorlesungWS16`

Prof. Dr. E. Hellmann WS 2016/17

Deformationtheorie
und Deformationen von Galoisdarstellungen

Blatt 6

Abgabe: 09.12.2016

Es sei Λ ein vollständiger lokaler Noetherscher Ring mit Restklassenkörper k.

Aufgabe 1:
Sei $F : \mathcal{C}_\Lambda \to$ (Mengen) ein Deformationsfunktor mit Tangential-Obstruktionstheorie (T_1, T_2, ob). Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierte Abbildung $T_1 \to t_F$ ein Homomorphismus von k-Vektorräumen ist.

Aufgabe 2:
Sei G eine endlich präsentierte abelsche Gruppe, d.h. es gibt eine exakte Sequenz

$$\mathbb{Z}^{m_2} \longrightarrow \mathbb{Z}^{m_1} \longrightarrow G \longrightarrow 0,$$

und sei $\chi : G \to k^\times$ ein Charakter. Sei $\mathcal{D}_\chi$ der Deformationsfunktor von χ. Konstruieren Sie explizit eine Tangential-Obstruktionstheorie (T_1, T_2, ob) für $\mathcal{D}_\chi$.

Aufgabe 3:
Sei X ein eigentliches Λ-Schema und sei $\mathcal{E}_k$ ein Vektorbündel auf X_k. Sei $\mathcal{D}_{\mathcal{E}_k} : \mathcal{C}_\Lambda \to$ (Mengen) der Funktor

$$(A, \mathfrak{m}_A) \longrightarrow \{(\mathcal{E}, \iota) \mid \mathcal{E} \text{ Vektorbündel auf } X_A,\ \iota : \mathcal{E}_k \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}|_{X_k}\}/_{\cong}.$$

Dabei sind $(\mathcal{E}_1, \iota_1)$ und $(\mathcal{E}_2, \iota_2)$ isomorph falls es einen Isomorphismus $\alpha : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ gibt, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_1|_{X_k} \arrow[rr, "\alpha|_{\mathcal{E}_1|_{X_k}}"] & & \mathcal{E}_2|_{X_k} \\
& \mathcal{E}_k \arrow[ul, "\iota_1"] \arrow[ur, "\iota_2"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Zeigen Sie, dass es eine Tangential-Obstruktionstheorie (T_1, T_2, ob) für $\mathcal{D}_{\mathcal{E}_k}$ mit

$$T_i = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X_k}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = H^i(X_k, \mathcal{E}_k \otimes \mathcal{E}_k^*)$$

gibt.

Homepage: `www.wwu.de/IVV5WS/WebHop/user/hellmane/VorlesungWS16`

Deformationtheorie
und Deformationen von Galoisdarstellungen

Blatt 7

Abgabe: 13.01.2017

Sei Λ ein vollständiger, lokaler, noetherscher Ring mit Restklassenkörper k.

Aufgabe 1:

Sei G eine Gruppe und $\bar{\rho} : G \to \mathrm{GL}_n(k)$ eine Darstellung. Sei $\pi : A \to B$ eine Surjektion in $\mathcal{C}_\Lambda$ mit $I = \ker(\pi)$ und $\mathfrak{m}_A I = 0$. Sei $\rho_B \in \mathcal{D}^{\square}_{\bar{\rho}}$ ein Lift von $\bar{\rho}$ und für $g \in G$ sei $\tilde{\rho}(g) \in A$ ein Lift von $\rho_B(g) \in B$. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{\rho}(g)\tilde{\rho}(h)\tilde{\rho}(gh)^{-1} - 1 \in Z^2(G, \mathrm{Mat}_{n\times n}(I))$$

gilt.

Aufgabe 2:

Seien ℓ und p Primzahlen. Sei $G = \mathbb{Z}$ aufgefasst als topologische Gruppe, versehen mit der ℓ-adischen Topologie. Sei $\mathbb{F}_p$ die triviale Darstellung von G auf $\mathbb{F}_p$. Berechnen Sie $H^i(G, \mathbb{F}_p)$ und $H^i_{\mathrm{cont}}(G, \mathbb{F}_p)$. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $\ell \neq p$ und $\ell = p$. Zeigen Sie insbesondere, dass die Gruppenkohomologie und die stetige Gruppenkohomologie im Allgemeinen nicht übereinstimmen.

Aufgabe 3:

Sei G eine pro-endliche Gruppe, die die Endlichkeitsbedingung Φ_p erfüllt. Sei Λ eine vollständiger lokaler Ring mit endlichem Restklassenkörper k von Charakteristik p. Sei $\bar{\rho} : G \to \mathrm{GL}_n(k)$ eine stetige Darstellung. Zeigen Sie direkt (also ohne Ausnutzung einer Tangential-Obstruktions-Theorie), dass der Deformationsfunktor $\mathcal{D}_{\bar{\rho}}$ die Schlessinger-Bedingungen $(H_1), (H_2)$ und (H_3) erfüllt.

Homepage: `www.wwu.de/IVV5WS/WebHop/user/hellmane/VorlesungWS16`

Deformationtheorie
und Deformationen von Galoisdarstellungen

Blatt 8

Abgabe: 20.01.2017

Aufgabe 1:
Sei G eine (pro-)endliche Gruppe und M eine (diskrete) abelsche Gruppe mit (stetiger) G-Operation. Zeigen Sie:

(i) Es gibt einen natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Hom}_G(G^q, \mathrm{Ind}\, M) \cong \mathrm{Abb}(G^q, M)$. (Dabei sollen Hom bzw. Abb *stetige* Homomorphismen bzw. Abbildungen bezeichnen)

(ii) Der Komplex $C^\bullet(G, M)$, der die (stetige) Kohomologie $H^\bullet(G, \mathrm{Ind}\, M)$ berechnet, ist isomorph zur Standardauflösung

$$0 \to M \to \mathrm{Abb}(G, M) \to \mathrm{Abb}(G^2, M) \to \mathrm{Abb}(G^3, M) \to \dots$$

wobei die Differentiale $d^n : \mathrm{Abb}(G^n, M) \to \mathrm{Abb}(G^{n+1}, M)$ durch

$$d^n f : (g_0, \dots, g_n) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f(g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_n)$$

gegeben sind.

(iii) Es gilt $H^q(G, \mathrm{Ind}\, M) = 0$ für $q > 0$.

Aufgabe 2:
Sei G eine (pro-)endliche Gruppe und M eine topologische abelsche Gruppe mit stetiger G-operation. Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierte Abbildung

$$\mathrm{Ext}(G, M) \longrightarrow H^2(G, M)$$

wohldefiniert und bijektiv ist.

Aufgabe 3:
Sei L eine (endliche) Galoiserweiterung eines Körpers K und sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Seien $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und sei $x \in V^{\otimes p} \otimes_K V^{*\otimes q}$. Seien V_L und x_L die Skalarerweiterungen von V bzw. x und sei $H = \mathrm{Aut}(V_L, x_L)$ die Untergruppe von $\mathrm{Aut}_L(V_L)$, die aus allen Automorphismen besteht, die x_L fixieren. Die Galoisgruppe $G_L = \mathrm{Gal}(L/K)$ operiert in natürlicher Weise auf H durch $\sigma f = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}$ für $\sigma \in G_L, f \in H$. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Bijektion

$$H^1(G_L, H) \cong E(L/K, (V, x))$$

gibt. Dabei ist $E(L/K, (V, x))$ die Menge aller Isomorphieklassen von Tupeln (W, y), bestehend aus einem K-Vektorraum W und $y \in W^{\otimes p} \otimes_K W^{*\otimes q}$, sodass $(W_L, y_L) \cong (V_L, y_L)$gilt.
(Man sagt: $E(L/K, (V, x))$ ist die Menge der Isomorphieklassen von K-Formen von (V_L, x_L))

Deformationtheorie
und Deformationen von Galoisdarstellungen

Blatt 9

Abgabe: 27.01.2017

Sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$. Ziel dieses Übungszettels ist es, zu zeigen, dass jede zentral einfache K-Algebra über einer *unverzweigten* Erweiterung von K spaltet. Sei dazu A eine Divisionsalgebra mit Zentrum K. Sei $n^2 = \dim_K A$ und $N : A \to K$ die reduzierte Norm. Ferner sei $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ die Bewertung auf K (normiert durch $v(\varpi) = 1$ für einen Uniformisierer $\varpi \in K$).

Aufgabe 1:
Sei $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ definiert durch $d\mathbb{Z} = v(N(A^\times)) \subset$ und setze $w = \frac{1}{d} \cdot v \circ N : A^\times \to \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(i) Für $a \in K$ gilt $w(a) = \frac{n}{d} v(a)$.

(ii) Für $a, b \in A^\times$ gilt $w(ab) = w(a) + w(b)$ und $w(a+b) \geq \min(w(a), w(b))$ (falls $a \neq -b$).

(iii) Sei $0 < q < 1$. Die Produkttopologie auf $A \cong A^{n^2}$ wird durch die Norm $||a|| = q^{w(a)}$ definiert, wobei 0

(iv) Ein Element $x \in A^\times$ ist ganz über $\mathcal{O}_K$ genau dann, wenn $w(x) \geq 0$ gilt.

(v) Die Menge $B = \{0\} \cup \{x \in A^\times | w(x) \geq 0\}$ ist ein Unterring von A.

Aufgabe 2:
Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass A eine nicht-triviale unverzweigte Körpererweiterung L von K enthält. Gehen Sie dazu wie folgt vor. Wir nehmen an, dass die Behauptung nicht stimmt, i.e. jeder nicht triviale Unterkörper von A ist verzweigt über K.
Sei $\pi \in A^\times$ ein Element mit $w(\pi) = 1$. Zeigen Sie:

(i) Sei $b \in B$, dann gibt es $a \in K$ und $b_1 \in B$, sodass $b = a + \pi b_1$.

(ii) Sei $b \in B$, dann gilt $b \in K(\pi)$.

(iii) Folgern Sie, dass (ii) der Annahme $n \geq 2$ widerspricht.

Aufgabe 3:

(i) Zeigen Sie induktiv, dass A einen maximalen Teilkörper L von K enthält (also einen Teilkörper mit $[L : K] = n$), der unverzweigt über K ist.

(ii) Folgern Sie, dass A über L spaltet.

Homepage: `www.wwu.de/IVV5WS/WebHop/user/hellmane/VorlesungWS16`

Prof. Dr. E. Hellmann WS 2016/17

Deformationtheorie
und Deformationen von Galoisdarstellungen

Blatt 10

Abgabe: 03.02.2017

Aufgabe 1:
Seien K und L endliche Erweiterungen von $\mathbb{Q}_p$.

(i) Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_L[\![\mathcal{O}_K^\times]\!] \cong \prod \mathcal{O}_L[\![T_1, \dots, T_m]\!]$$

gibt, mit $m = [K : \mathbb{Q}_p]$ und wobei das Produkt über alle Charaktere $\mathcal{O}_K^\times \to k_L^\times$ mit Werten im Restklassenkörper k_L von L läuft.

(ii) Beschreiben Sie mit Hilfe von (i) und lokaler Klassenkörpertheorie die Deformationsräume von stetigen Charakteren von $G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$.

Aufgabe 2:
Sei $K = \mathbb{Q}_2$ und $\bar{\rho} : G_K = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_2)/\mathbb{Q}_2) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ die triviale 2-dimensionale Darstellung. Zeigen Sie, dass der Deformationsring $R_{\bar{\rho}}^{\square}$ von Deformationen von $\bar{\rho}$ mit Koeffizienten in lokalen Artinschen $\mathbb{Z}_2$-Algebren eine Präsentation

$$R \cong \mathbb{Z}_2[\![T_1, \dots, T_{12}]\!]/(f_1, \dots, f_4)$$

besitzt.

Aufgabe 3:
Sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ und sei $\chi : G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to A^\times$ ein unverzweigter Charakter mit Werten in einer Artinschen $\mathbb{Z}_p$-Algebra A. Zeigen Sie, dass χ flach ist.

Homepage: `www.wwu.de/IVV5WS/WebHop/user/hellmane/VorlesungWS16`