Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

SS 2017

Klausur zur Vorlesung
Einführung in die Algebra
01.08.2017

Aufgabe 1:(2+4+2)
Sei G eine Gruppe und $Z(G) = \{g \in G \mid gh = hg, \forall h \in G\} \subset G$ das Zentrum vom G. Zeigen Sie:

(i) Die Untergruppe $Z(G)$ ist ein Normalteiler von G.
(Sie dürfen verwenden, dass $Z(G)$ eine Untergruppe ist.)
(ii) Falls $G/Z(G)$ zyklisch ist, so ist G abelsch.
(iii) Falls $|G/Z(G)| = 4$, so ist $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2:(2+2+2+2)
Sei K ein Körper. Welche der folgenden Ringe sind Hauptidealringe?

(i) $K[X]/X^2$
(ii) $K[X,Y]/(X - aY)$, für ein $a \in K$
(iii) $K[X_1, \dots, X_n]$, für $n \geq 2$
(iv) $K[X,Y]/(Y^2 - X^3)$

Aufgabe 3:(2+2+2+2)
Bestimmen Sie für den Ring $R = \mathbb{Z}[X]/(5, X^2 + 3X + 1)$ die Anzahl seiner

(i) Elemente
(ii) Primideale
(iii) maximalen Ideale
(iv) Ideale

Aufgabe 4:(3+2+3)
Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome irreduzibel sind.

(i) $Y^3 + X^2Y^2 - 2XY^2 + Y^2 + XY - Y + X - 1 \in \mathbb{Z}[X,Y]$
(ii) $X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$
(iii) $X^3 - X^2 - X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$

Aufgabe 5:(4+4)
Sei R ein Hauptidealring und M ein freier R-Modul von endlichem Rang. Seien N_1, N_2 zwei R-Untermoduln von M. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Beweisen Sie die Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(i) $N_1 \cong N_2$ impliziert $M/N_1 \cong M/N_2$
(ii) $M/N_1 \cong M/N_2$ impliziert $N_1 \cong N_2$

Aufgabe 6:(3+5)

(i) Liegt $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{3})$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5})$?
(ii) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $a = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$ über $\mathbb{Q}$ und den Grad der Erweiterung $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$.

Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

SS 2017

Lösungsskizze zur Klausur
Einführung in die Algebra

Aufgabe 1:

(i) Für $h \in Z(G)$ und $g \in G$ gilt: $ghg^{-1} = gg^{-1}h = h \in Z(G)$.

(ii) Sei $g \in G$, so dass die Restklasse von g in $G/Z(G)$ ein Erzeuger von $G/Z(G)$ ist. Dann ist

$$G = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} g^k Z(G)$$

Seien $g_1, g_2 \in G$. Dann existieren $h_1, h_2 \in Z(G)$ und $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, so dass $g_i = g^{n_i}h_i$ für $i = 1, 2$. Dann gilt:

$$g_1g_2 = g^{n_1}h_1g^{n_2}h_2 = g^{n_1+n_2}h_2h_1 = g^{n_2}h_2g^{n_1}h_1 = g_2g_1$$

(iii) Falls $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ zyklisch ist, dann wäre G nach (ii) abelsch, d.h. $G = Z(G)$. Folglich $|G/Z(G)| = 1$.

Aufgabe 2:

(i) $K[X]/X^2$ ist kein Integritätsbereich, da $X \cdot X = 0$, also auch kein Hauptidealring.

(ii) $K[X, Y]/(X - aY) \cong K[Y]$ ist ein Hauptidealring.

(iii) Es genügt ein Primideal anzugeben, welches nicht maximal ist. Das Primideal $(X_1) \in K[X_1, \ldots, X_n]$ erfüllt diese Eigenschaft, da der Qutient isomorph ist zu $K[X_2, \ldots, X_n]$.

(iv) Nach einer Übungsaufgabe ist $K[X, Y]/(Y^2 - X^3)$ nicht faktoriell und somit kein Hauptidealring.

Aufgabe 3:

Der Ring R ist isomorph zu $\mathbb{F}_5[X]/(X - 1)^2$.

(i) R ist ein 2-dimensionaler $\mathbb{F}_5$-Vektorraum und hat folglich 25 Elemente.

(ii) Da $\mathbb{F}_5[X]$ ein Hauptidealring ist, wird jedes Ideal von R von einem Element erzeugt. Das einzige Primideal ist die Restklasse von $X - 1$.

(iii) Siehe (ii).

(iv) Die einzigen Ideale sind 0, das Primideal und der ganze Ring.

Aufgabe 4:

(i) $Y^3 + X^2Y^2 - 2XY^2 + Y^2 + XY - Y + X - 1 = Y^3 + (X - 1)^2Y^2 + (X - 1)Y + X - 1 \in \mathbb{Z}[X, Y]$. Der Ring $\mathbb{Z}[X, Y] = \mathbb{Z}[X][Y]$ ist faktoriell nach dem Satz von Gauß. Weiter ist $(X - 1) \in \mathbb{Z}[X, Y]$ ein Primelement, da $\mathbb{Z}[X, Y]/(X - 1) \cong \mathbb{Z}[Y]$ ein Integritätsbereich ist. Die Aussage folgt aus dem Eisenteinkriterium für das Primelement $X - 1$.

(ii) $f(X) = X^2 + X + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_2[X]$, da $f(X)$ keine Nullstelle hat. Da das Polynom normiert ist, ist es auch irreduzibel über $\mathbb{Z}[X]$.

(iii) Das Polynom $f(X) = X^3 - X^2 - X + 3 \in \mathbb{Z}[X]$ ist irreduzibel, genau dann wenn $f(X + 1) = X^3 + 2X^2 + 2$ irreduzibel ist. Aber $f(X + 1)$ ist irreduzibel nach dem Eisensteinkriterium für $p = 2$.

Aufgabe 5:

(i) Die Aussage ist falsch. Sei $R = M = \mathbb{Z}$, $M_1 = 2\mathbb{Z}$ und $M_2 = 3\mathbb{Z}$. Dann ist $M_1 \cong M_2$ als $\mathbb{Z}$-Modul, aber $M_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $M_2 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sind nicht isomorph.

(ii) Die Aussage ist richtig. Untermoduln von freien R-Moduln sind frei, wenn R ein Hauptidealring ist. Also existieren $n, n_i \in \mathbb{N}$ mit $n_i \leq n$ für $i = 1, 2$, so dass $M = R^n, M_i = R^{n_i}$. Aus $M/N_1 \cong M/N_2$ folgt, dass $n - n_1 = n - n_2$. Also $n_1 = n_2$ und somit sind M_1 und M_2 isomorph.

Aufgabe 6:

(i) Sei $a = \sqrt[5]{3}, b = \sqrt[7]{5}$. Das Minimalpolynom von a bzw. b über $\mathbb{Q}$ ist gegeben durch $X^5 - 3$ bzw. $X^7 - 5$. Beide sind irreduzibel nach Eisenstein für $p = 3$ bzw. $p = 5$. Angenommen $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{3})$ liegt in $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5})$, d.h. $3 = [\mathbb{Q}(a) \colon \mathbb{Q}] \mid [\mathbb{Q}(b) \colon \mathbb{Q}] = 5$.

(ii) Es gilt $a^4 = 9 + 4\sqrt{5}$. Also ist a eine Nullstelle von $X^4 - 4X^2 - 1$. Die Behauptung ist, dass das Polynom irreduzibel über $\mathbb{F}_3[X]$ ist. $X^4 + 2X + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$ hat keine Nullstelle, also genügt es die Teilbarkeit auf Polynome vom Grad 2 zu überprüfen. Angenommen $(a_2X^2 + a_1X + a_0)(b_2X^2 + b_1X + b_0) = X^4 + 2X + 2$. Koeffizientenvergleich ergibt: $a_2 = b_2$, $a_1 = -b_1$, $a_0 + b_0 = 0$ und $a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = 0$. Dies führt man leicht zu einem Widerspruch.
Den Grad der Erweiterung $\mathbb{Q}(a)$ über $\mathbb{Q}$ ist dann gegeben durch den Grad des Minimalpolynoms von a, also $[\mathbb{Q}(a) \colon \mathbb{Q}] = 4$.