TOPOLOGISCHE STARRHEIT UND GRUPPENRINGE

ARTHUR BARTELS

Mannigfaltigkeiten sind topologische Räume, die lokal eine sehr einfache Struktur haben: ihre lokale Struktur ist die des n-dimensionalen Raums $\mathbb{R}^n$. Das Studium und die Klassifikation von Mannigfaltigkeiten ist ein zentrales Anliegen der Topologie. Die von Browder, Novikov, Sullivan, Wall und vielen anderen entwickelte Chirurgietheorie erlaubt es, viele Klassifikationsfragen auf algebraische Probleme zurückzuführen. Beispielsweise hat Freedman gezeigt, dass eine gewisse Klasse von 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im Wesentlichen durch ihre Schnittform (bis auf Homöomorphismus) klassifiziert sind. Die Schnittform ist eine unimodulare symmetrische bilineare Form über dem Ring der ganzen Zahlen. Wichtig für dieses Resultat ist, dass die betrachteten Mannigfaltigkeiten einfach-zusammenhängend sind. Informell gesprochen bedeutet dies, dass bis auf stetige Deformation (Homotopie) alle geschlossenen Kurven in der Mannigfaltigkeit trivial sind. Im Allgemeinen ist dies nicht richtig: die Homotopieklassen geschlossener Kurven bilden eine Gruppe, die Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit.

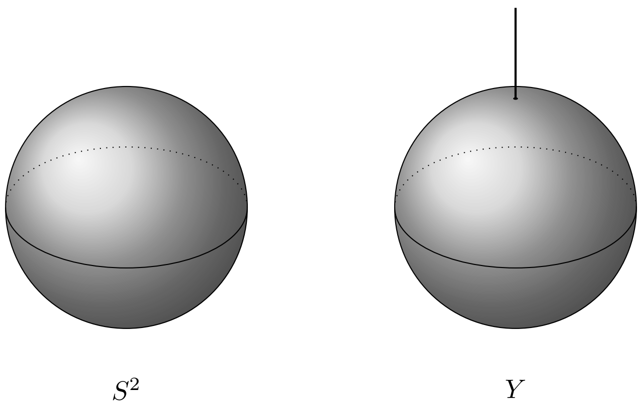
Während das Studium einfach-zusammenhängender Mannigfaltigkeiten zu Algebra über dem Ring der ganzen Zahlen (wie beispielsweise der soeben erwähnten Schnittform) führt, muss man bei der Untersuchung von Mannigfaltigkeiten mit Fundamentalgruppe G über dem ganzzahligen Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$ arbeiten. Algebraisch verhält sich der Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$ viel schlechter als der Ring der ganzen Zahlen, er ist beispielsweise im Allgemeinen weder kommutativ noch noethersch. Von besonderer Bedeutung für die Klassifikation von Mannigfaltigkeiten mit Fundamentalgruppe G und die Anwendung der Chirurgietheorie auf dieses Problem ist die algebraische K- und L-Theorie des Gruppenrings $\mathbb{Z}[G]$. Diese sind Familien von abelschen Gruppen $(K_n(\mathbb{Z}[G]))_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(L_n(\mathbb{Z}[G]))_{n\in\mathbb{Z}}$, die Ringen (in diesem Fall dem Gruppenring) natürlich zugeordnet werden. Diese lassen sich erstaunlicherweise in vielen Fällen noch relativ explizit berechnen. Dabei spielen nun meist nicht algebraische Eigenschaften der Gruppe oder des Gruppenrings die Hauptrolle, sondern geometrische Eigenschaften der Gruppe.

Eine interessante und große Klasse von Mannigfaltigkeiten sind die asphärischen Mannigfaltigkeiten. Eine wichtige Vermutung der Topologie, die Borel-Vermutung, sagt vorher, dass asphärische Mannigfaltigkeiten durch ihre Fundamentalgruppe klassifiziert werden. (Genauer besagt die Vermutung, dass diese Mannigfaltigkeiten topologisch starr sind.) Am Beispiel dieser Vermutung wird der Zusammenhang zwischen algebraischer K- und L-Theorie und der Klassifikation von Mannigfaltigkeiten besonders deutlich. Es gibt eine Vermutung von Farrell und Jones zur Struktur der algebraischen K- und L-Theorie von Gruppenringen, die die Borel-Vermutung (für asphärische Mannigfaltigkeiten von Dimension mindestens 5) impliziert. Darüberhinaus steht diese Vermutung in Verbindung mit einfach formulierbaren algebraischen Fragen über die Struktur von Gruppenringen, wie zum Beispiel der Kaplansky-Vermutung. Dieser Artikel gibt eine informelle Einführung zu den erwähnten Begriffen. Es werden die genannten Vermutungen und den Verbindungen zwischen ihnen diskutiert.

Date: Juni 2009.

1. Topologische Starrheit

Topologische Räume X und Y heißen *homöomorph*, falls es eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ gibt, die ein stetiges Inverses besitzt. Topologische Räume X und Y heißen *homotopieäquivalent*, falls sie stetig ineinander deformiert werden können. Genauer gesagt, soll es stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ geben, so dass die Kompositionen $g \circ f$ und $f \circ g$ zwar nicht notwendig die Identitätsabbildungen id_X und id_Y sind, aber homotop zu diesen sind[1]. (Man sagt dann, dass g ein Homotopieinverses zu f ist.) Es ist einfach, topologische Räume zu konstruieren, die homotopieäquivalent aber nicht homöomorph sind. Beispielsweise können wir an einen Punkt der Kugeloberfläche S^2 ein Intervall ankleben. Dann erhalten wir einen Raum Y, der homotopieäquivalent zur S^2 ist: indem wir das Intervall stetig schrumpfen, können wir Y stetig zur S^2 deformieren.



Die Räume Y und S^2 sind aber nicht homöomorph. Schon lokal gibt es Unterschiede. Die Kugeloberfläche ist eine zwei-dimensionale Mannigfaltigkeit: jeder Punkt besitzt eine Umgebung, die homöomorph zum zwei-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ ist. Der Raum Y ist keine zwei-dimensionale Mannigfaltigkeit; die Punkte auf dem angeklebten Intervall besitzen keine solchen Umgebungen.

Allgemein ist eine *n-dimensionale Mannigfaltigkeit* (oder kürzer eine n-Mannigfaltigkeit) ein Raum, in dem jeder Punkt eine Umgebung hat, die homöomorph zum n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ ist. Lokal lassen sich zwei n-Mannigfaltigkeiten also nicht voneinander unterscheiden. Es gibt aber Paare von n-Mannigfaltigkeiten, beispielsweise Linsenräume, die homotopieäquivalent aber nicht homöomorph sind. Ein typisches Klassifikationsproblem besteht nun darin, zu einer gegebenen Mannigfaltigkeit (oder einem topologischen Raum) alle dazu homotopieäquivalenten Mannigfaltigkeiten zu finden[2]. Die einfachste mögliche Antwort auf ein solches Klassifikationsproblem für eine Mannigfaltigkeit M ist, dass es keine homotopieäquivalenten Mannigfaltigkeiten N gibt, die nicht homöomorph zu M sind. Positiv ausgedrückt ist dann jede Mannigfaltigkeit, die homotopieäquivalent zu M ist, schon homöomorph zu M. Eine solche Mannigfaltigkeit M heißt *topologisch starr*[3]. Für $n \leq 2$ ist jede n-Mannigfaltigkeit topologisch starr. Darüber hinaus gibt es in diesen Dimensionen eine sehr übersichtliche und konkrete Klassifikation. Beispielsweise ist der Kreis S^1 im Wesentlichen die einzige 1-Mannigfaltigkeit. Betrachten wir nun

[1] Stetige Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ heißen *homotop*, falls es eine stetige Familie $(H_t\colon X \to Y)_{t\in[0,1]}$ von stetigen Abbildungen gibt, so dass $H_0 = f$ und $H_1 = g$.

[2] Genauer gesagt studiert man oft nur kompakte Mannigfaltigkeiten. Wir werden in diesem Artikel stillschweigend voraussetzen, dass alle betrachteten Mannigfaltigkeiten kompakt sind.

[3] Streng genommen sollte man verlangen, dass jede Homotopieäquivalenz von M zu einer anderen Mannigfaltigkeit homotop zu einem Homömorphismus ist.

die n-Sphäre $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}$. Dies ist die n-dimensionale Verallgemeinerung des Kreises S^1 und der Kugeloberfläche S^2. Die von Smale (für $n \geq 5$), Freedman (für $n = 4$) und Perelman (für $n = 3$) bewiesene *Poincaré-Vermutung* besagt, dass die Sphären S^n für alle n topologisch starr sind.

Die n-Sphäre S^n ist für $n \geq 2$ einfach-zusammenhängend: jede stetige Abbildung $S^1 \to S^n$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung. Für beliebige Mannigfaltigkeiten M (zum Beispiel für den Kreis S^1) ist dies im Allgemeinen falsch. Homotopieklassen von solchen stetigen Abbildungen bilden die Elemente der Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$. Jede endlich präsentierte Gruppe ist die Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit. Die Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit M ist genau dann trivial, wenn M einfach-zusammenhängend ist.

In gewissem Sinne sind die Sphären die einfachsten Beispiele von Mannigfaltigkeiten. In der algebraischen Topologie werden topologischen Räumen Homologiegruppen zugeordent. Von diesem Standpunkt aus betrachtet, sind die Sphären die einfachsten unter allen Mannigfaltigkeiten. Ihre Homologiegruppen haben die einfachst mögliche Struktur. Andererseits sind die Homotopiegruppen[4] $\pi_k(S^n)$ für $k > n$ sehr kompliziert und bisher nicht vollständig verstanden. Von diesem Standpunkt aus betrachtet ist eine andere Klasse von Mannigfaltigkeiten die einfachste: *asphärische Mannigfaltigkeiten*. Eine Mannigfaltigkeit M heißt asphärisch, falls jede stetige Abbildung $S^k \to M$ mit $k \geq 2$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Der Homotopietyp einer solchen asphärischen Mannigfaltigkeit wird durch seine Fundamentalgruppe bestimmt: asphärische Mannigfaltigkeiten sind genau dann homotopieäquivalent, wenn ihre Fundamentalgruppen isomorph sind.

Vermutung (Borel)**.** *Asphärische Mannigfaltigkeiten sind topologisch starr.*

Diese Vermutung besagt also insbesondere, dass die Fundamentalgruppe einer asphärischen Mannigfaltigkeit diese nicht nur bis auf Homotopieäquivalenz sondern sogar bis auf Homöomorphismus festlegt. Eine Einführung zu dieser Vermutung findet sich in [8]. Die Borel-Vermutung ist aus folgendem Grund schwieriger als die Poincaré-Vermutung: über die Chirurgietheorie führt sie zu schwierigen Fragestellungen über die algebraische K- und L-Theorie des ganzzahligen Gruppenrings $\mathbb{Z}[\pi_1(M)]$ der Mannigfaltigkeit. Da die Sphären einfach-zusammenhängend sind, spielen diese Fragestellungen für die Poincaré-Vermutung keine Rolle.

Beispiele von asphärischen Mannigfaltigkeiten sind Mannigfaltigkeiten, die eine Riemannsche Metrik nichtpositiver Schnittkrümmung tragen. Für diese Klasse von Beispielen wurde die Borel-Vermutung (unter der zusätzlichen Annahme, dass die Dimension der Mannigfaltigkeit mindestens 5 ist) von Farrell und Jones bewiesen [7]. Beispiele für Mannigfaltigkeiten nichtpositiver Schnittkrümmung sind hyperbolische Mannigfaltigkeiten. Für diese gibt es mit dem Starrheitssatz von Mostow eine wesentlich stärkere Aussage.

Theorem (Mostow)**.** *Seien M und N hyperbolische Mannigfaltigkeiten der Dimension mindestens 3. Dann gibt es genau dann eine Isometrie $M \to N$, wenn M und N homotopieäquivalent sind.*

Für hyperbolische Mannigfaltigkeiten der Dimension mindestens 3 bestimmt die Fundamentalgruppe also sogar die Geometrie der Mannigfaltigkeit. Die Borel-Vermutung wird oft auch als topologische Version des Starrheitssatzes von Mostow bezeichnet.

[4] Für einen topologischen Raum X und $k \geq 2$ bilden Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $S^k \to X$ eine abelsche Gruppe $\pi_k(X)$.

2. Gruppenringe

Sei G eine Gruppe und R ein Ring. Den *Gruppenring* $R[G]$ mit Koeffizienten in R über der Gruppe G erhält man, indem man für jedes Gruppenelement g eine Einheit zu R hinzufügt. Ist zum Beispiel $G = \mathbb{Z}$ die unendlich zyklische Gruppe, so ist $R[\mathbb{Z}] = R[X, X^{-1}]$ der Ring der Laurentpolynome: für jedes $n \in \mathbb{Z}$ enthält er die Einheit X^n (das Inverse von X^n in $R[X, X^{-1}]$ ist X^{-n}). Diese Konstruktion verallgemeinert sich wie folgt zu beliebigen Gruppen. Elemente von $R[G]$ sind formale R-Linearkombinationen von Gruppenelementen $\sum_{g\in G} r_g \cdot g$, mit $r_g \in R$ so dass $r_g \neq 0$ nur für endlich viele $g \in G$. Addition und Multiplikation sind wie folgt erklärt:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{g\in G} r_g \cdot g\right) + \left(\sum_{g\in G} s_g \cdot g\right) \quad &:= \quad \sum_{g\in G} (r_g + s_g) \cdot g, \\ \left(\sum_{g\in G} r_g \cdot g\right) \cdot \left(\sum_{g\in G} s_g \cdot g\right) \quad &:= \quad \sum_{g\in G} \left(\sum_{h\in G} r_h s_{h^{-1}g}\right) \cdot g.\end{aligned}$$

Das Einselement im Gruppenring $R[G]$ ist gegeben durch $1_R \cdot e_G$, wobei 1_R das Einselement von R und e_G das neutrale Element von G bezeichnet. Durch $r \mapsto r \cdot e_G$ erhält man eine Einbettung von Ringen $R \to R[G]$. Der Gruppenring $R[G]$ ist also in der Tat in natürlicher Weise eine Ringerweiterung von R. Auch die Gruppe G findet sich in $R[G]$ wieder: Die Abbildung $g \mapsto 1_R \cdot g$ definiert einen Gruppenhomorphismus von G in die Gruppe der Einheiten $R[G]^\times$ von $R[G]$. Mittels dieser Abbildung ist G eine Untergruppe der Gruppe der Einheiten im Gruppenring.

Die algebraische Struktur des Gruppenrings $R[G]$ ist oft viel schwieriger zu verstehen als die des Rings R. Betrachten wir zum Beispiel die Gruppe der Einheiten in $R[G]$. Zunächst gibt es zwei einfache Wege Einheiten in $R[G]$ zu konstruieren. Einerseits ist jede Einheit in R auch eine Einheit in $R[G]$, da $R[G]$ eine Ringerweiterung von R ist. Es ist also $R^\times$ eine Untergruppe von $R[G]^\times$. Andererseits ist G eine Untergruppe der Einheiten. Da diese Untergruppen miteinander kommutieren, ist $R^\times \cdot G$ eine Untergruppe der Einheiten, die Untergruppe der sogenannten *kanonischen Einheiten*. Dies ist ein einfaches Beispiel für das Prinzip der Spaltung der Variablen für Gruppenringe: in der Antwort auf eine Frage über den Gruppenring werden die Variablen R und G getrennt behandelt und spielen verschiedene Rollen. Im Fall der Einheiten ist die spannende Frage nun, ob alle Einheiten im Gruppenring kanonisch sind, oder ob es Einheiten gibt, deren Konstruktion sowohl die Gruppe als auch den Koeffizientenring benutzt.

Beispiel. Sei R ein Ring.

(i) Sei $G = \mathbb{Z}$ die unendlich zyklische Gruppe. Dann lässt sich der Gruppenring $R[\mathbb{Z}]$ mit dem Ring der Laurentpolynome $R[X, X^{-1}]$ identifizieren. Der kanonische Isomorphismus $R[\mathbb{Z}] \to R[X, X^{-1}]$ ist durch $r \cdot n \to r \cdot X^n$ definiert. Ist R nullteilerfrei, so sind alle Einheiten in $R[X, X^{-1}]$ kanonische Einheiten. Ist $0 \neq v \in R$ ein nilpotentes Element, so ist $1 - vX$ eine Einheit, die nicht kanonisch ist. (Es ist $(1-vX)^{-1} = 1 + vX + \cdots + v^N X^N$, wenn $v^{N+1} = 0$.)

(ii) Sei $G = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ die zyklische Gruppe der Ordnung 5. In diesem Fall lässt sich der Gruppenring $R[G]$ mit einem Quotienten des Polynomrings $R[X]$ identifizieren. Die Abbildung $r \cdot n \mapsto r \cdot X^n$ induziert einen Isomorphismus $R[\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}] \to R[X]/(X^5 - 1)$. Das Element $1 - X - X^4$ ist eine Einheit im Ring $R[X]/(X^5 - 1)$; das Inverse ist $1 - X^2 - X^3$. In diesem Fall sind also nicht alle Einheiten kanonische Einheiten.

Man kann leicht aus dem zweiten Beispiel folgern, dass für jede Gruppe G, die ein Element der Ordnung 5 enthält, der Gruppenring $R[G]$ Einheiten enthält, die nicht kanonisch sind. Überraschenderweise ist die Situation für torsionsfreie Gruppen anders. Die Antwort auf folgende Frage ist offen.

Frage. *Sei R ein nullteilerfreier Ring und G eine torsionsfreie Gruppe. Sind dann alle Einheiten im Gruppenring $R[G]$ kanonisch?*

Für Gruppenringe über torsionsfreien Gruppen funktioniert die Trennung der Variablen oft am besten, zumindest wenn man weitere Voraussetzungen (hier nullteilerfrei) an den Koeffizientenring stellt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll noch kurz die Frage nach idempotenten Elementen des Gruppenrings diskutiert werden. Auch hier wird sich wieder das unterschiedliche Verhalten von Gruppenringen über torsionsfreien Gruppen und Gruppen mit Torsion zeigen. Ein Element eines Rings $p \in R$ heißt *idempotent*, falls $p^2 = p$. Die trivialen idempotenten Elemente sind 0_R und 1_R. Ist p ein nicht-triviales idempotentes Element, so ist p ein Nullteiler, da $p(p - 1_R) = p^2 - p = 0_R$. Insbesondere sind 0_R und 1_R die einzigen idempotenten Elemente, falls R ein nullteilerfreier Ring ist. Ist G eine Gruppe, so ist jedes idempotente Element von R auch idempotent in $R[G]$.

Beispiel. Sei R ein Integritätsbereich.

(i) Die idempotenten Elemente des Gruppenrings $R[\mathbb{Z}]$ über der unendlich zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}$ sind genau die idempotenten Elemente des Rings R.

(ii) Ist G eine endliche Gruppe, deren Ordnung in R invertierbar ist, so ist $\sum_{g \in G} \frac{1}{|G|} \cdot g$ ein idempotentes Element in $R[G]$. In diesem Fall enthält der Gruppenring $R[G]$ also idempotente Elemente, die nicht vom Koeffizientenring R kommen.

Aus dem zweiten Beispiel kann man folgern, dass der rationale Gruppenring $\mathbb{Q}[G]$ nicht-triviale idempotente Elemente enthält, sobald G Elemente endlicher Ordnung enthält.

Vermutung (Kaplansky)**.** *Sei R ein Integritätsbereich und G eine torsionsfreie Gruppe. Dann sind $0_{R[G]}$ und $1_{R[G]}$ die einzigen idempotenten Elemente des Gruppenrings $R[G]$.*

3. Die Whiteheadgruppe.

Die im vorhergehenden Abschnitt diskutierten Fragen nach Einheiten und idempotenten Elementen in Gruppenringen sind nicht direkt relevant für die Borel-Vermutung und die Klassifikation von Mannigfaltigkeiten. Sehr relevant sind aber stabile Versionen dieser Fragen, die in der algebraischen K-Theorie formuliert werden. Anstelle der Gruppe der Einheiten $R^\times$ wird dabei die Gruppe $\mathrm{GL}_n(R)$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über R betrachtet. (Es ist $\mathrm{GL}_1(R) = R^\times$.) Durch Stabilisierung erhält man injektive Gruppenhomomorphism $\mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_{n+1}(R)$, die es erlauben die Gruppe $\mathrm{GL}(R) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{GL}_n(R)$ aller endlichen invertierbaren Matrizen zu bilden.

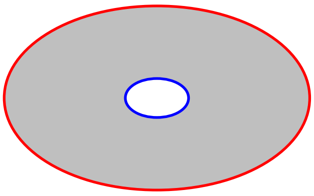
Definition. Sei R ein Ring. Die Gruppe $K_1(R)$ ist als die Abelisierung $\mathrm{GL}(R)_{ab} := \mathrm{GL}(R)/[\mathrm{GL}(R), \mathrm{GL}(R)]$ der Gruppe aller endlichen invertierbaren Matrizen über R definiert.

Es gibt einen kanonischen Gruppenhomomorphismus $R^\times = \mathrm{GL}_1(R) \to K_1(R)$. Für $R = \mathbb{Z}$ (oder allgemeiner für Hauptidealringe) ist diese Abbildung ein Isomorphismus (die Inverse ist die Determinante). Es ist also $K_1(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Für eine Gruppe G erzeugen die kanonischen Einheiten in $\mathbb{Z}[G]$ eine Untergruppe in

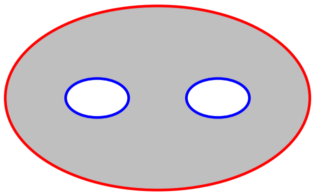
$K_1(R)$ und der Quotient ist die *Whiteheadgruppe* $\mathrm{Wh}(G)$ von G. Die Whiteheadgruppe kann man nun als eine stabile (und abelsche) Version des Quotienten der Einheiten $\mathbb{Z}[G]^\times$ nach der Untergruppe $\mathbb{Z}^\times \cdot G$ der kanonischen Einheiten auffassen. Für die zyklische Gruppe $G = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ der Ordnung 5 ist die Whiteheadgruppe nichttrivial: die Einheit $1 - X - X^4$ ist ein nichttriviales Element in $\mathrm{Wh}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. Die folgende offene Vermutung ist die K-theoretische Version der Frage nach Einheiten im Gruppenring über torsionsfreien Gruppen.

Vermutung. *Ist G eine torsionsfreie Gruppe, so ist* $\mathrm{Wh}(G) = 0$.

Die Whiteheadgruppe spielt zum Beispiel durch den s-Kobordismussatz eine wichtige Rolle in der Topologie. Ein *Kobordismus* zwischen n-Mannigfaltigkeiten M und N ist eine $n+1$-Mannigfaltigkeit W mit Rand, deren Rand ∂W die disjunkte Vereinigung von M und N ist. Sehr einfache 2-dimensionale Beispiele sind die skizzierten Kobordismen W_0 und W_1, die jeweils Kobordismen zwischen der roten und der blauen gefärbten 1-Mannigfaltigkeit sind.



W_0



W_1

Dabei ist W_0 homöomorph zum Produkt $S^1 \times [0,1]$, also *trivial*. Ein Kobordismus heißt ein *h-Kobordismus*, falls die Inklusionen $M \hookrightarrow W$ und $N \hookrightarrow W$ Homotopieäquivalenzen sind. In diesem Fall sind auch M und N homotopieäquivalent. Der s-Kobordismussatz besagt, dass die Menge der Isomorphieklassen von h-Kobordismen über einer Mannigfaltigkeit M der Dimension mindestens 5 durch ihre Whiteheadtorsion in $\mathrm{Wh}(G)$ klassifiziert wird. Dabei ist G die Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit M. Insbesondere sind also alle solche h-Kobordismen trivial, falls $\mathrm{Wh}(G) = 0$ gilt. In vielen Fällen erfolgt auf diesem Weg der Nachweis, dass zwei Mannigfaltigkeiten M und N homöomorph sind: man zeigt zunächst dass es einen h-Kobordismus zwischen M und N gibt; ist dieser trival, so folgt die Existenz des gewünschten Homöomorphismus. Diese Strategie wird sowohl im Beweis der Poincaré-Vermutung (in Dimensionen mindestens 4[5]) als auch im Zusammenhang mit der Borel-Vermutung angewendet. Hier zeigt sich, warum die Borel-Vermutung schwieriger als die Poincaré-Vermutung ist. Im letzteren Fall ist die Fundamentalgruppe trivial und die Whiteheadtorsion damit auch. Im Fall der Borel-Vermutung ist die Whiteheadtorsion dagegen ein potentielles Hindernis gegen die Existenz eines Homöomorphismus. Allerdings ist die Fundamentalgruppe einer asphärischen Mannigfaltigkeit notwendigerweise torsionsfrei. Die oben genannte Vermutung sagt also vorher, dass auch in diesem Fall die Whiteheadtorsion trivial sein sollte. In der Tat ist es ein wichtiger Schritt in allen bisher bekannten Fällen der Borel-Vermutung zu zeigen, dass die Whiteheadgruppe für die entsprechenden Klassen von Gruppen verschwindet.

Die Gruppen $K_n(R)$ sind nicht nur für $n = 1$ erklärt, sondern für alle ganzen Zahlen n. Idempotente Elemente in R liefern beispielsweise Elemente in $K_0(R)$. Für den ganzzahligen Gruppenring betrachtet man dann die reduzierte Klassengruppe $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[G]) := K_0(\mathbb{Z}[G])/K_0(\mathbb{Z})$. Diese Gruppe spielt, zum Beispiel da sie die Heimat

[5]Freedman hat gezeigt, dass in der Welt der topologischen Mannigfaltigkeiten der s-Kobordismussatz auch für h-Kobordismen über 4-Mannigfaltigkeiten gilt, falls die Fundamentalgruppe der betrachteten 4-Mannigfaltigkeit „gut“ist. Die triviale Gruppe ist „gut“.

für das Endlichkeitshindernis von Wall ist, eine ähnlich wichtige Rolle in Topologie wie die Whiteheadgruppe. In dieser Situation gibt es die Vermutung, dass für torsionsfreie Gruppen $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[G]) = 0$ gilt. Diese Vermutung kann als eine stabile Version der Kaplansky-Vermutung (für $R = \mathbb{Z}$) verstanden werden.

In der Chirurgietheorie studiert und modifiziert man Mannigfaltigkeiten mittels eingebetteter Sphären. Zur Konstruktion solcher Sphären ist es wichtig, Schnittzahlen und Selbstschnittzahlen zu verstehen. Algebraisch führen diese zu symmetrischen und quadratischen Formen über dem ganzzahligen Gruppenring der Fundamentalgruppe. In Analogie zu den algebraischen K-Gruppen gibt es für jeden Ring R[6] sogenannte L-Gruppen $L_n(R)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$.[7] Diese Gruppen messen in gewisser Weise die Komplexität quadratischer Formen über R. Diese Gruppen sind (für den ganzzahligen Gruppenring) von fundamentaler Bedeutung für die Chirurgietheorie: wichtige Invarianten und Hindernisse sind Elemente in diesen Gruppen. Anwendungen der Chirurgietheorie (beispielsweise auf die Borel-Vermutung) erfordern ein gutes Verständnis dieser L-Gruppen.

4. Die Farrell-Jones-Vermutung

Die Farrell-Jones-Vermutung macht eine Aussage über die Struktur der algebraischen K- und L-Theorie von Gruppenringen. Sie sagt vorher, dass die algebraischen K- und L-Gruppen zu gewissen äquivarianten Homologiegruppen isomorph sind. Da es für diese Homologiegruppen viele Berechnungsmethoden gibt, führt dies zu konkreten Berechnungen und Anwendungen auf algebraische und topologische Fragen. In der Farrell-Jones-Vermutung zeigt sich wieder das Prinzip der Trennung der Variablen für den Gruppenring. Im besten Fall setzt sich die K-Theorie des Gruppenrings $R[G]$ aus der K-Theorie des Koeffizientenrings R und einem Bestandteil, der von der Gruppe kommt, zusammen. Genauso wie im Zusammenhang mit der Frage nach Einheiten im Gruppenring funktioniert diese Trennung der Variablen für torsionsfreie Gruppen am besten.

Für eine beliebige Gruppe G und einen Ring R gibt es sogenannte *Assemblyabbildungen*

$$\begin{aligned} \alpha^K(R,G)\colon H_n(BG;\mathbf{K}_R) &\to K_n(R[G]), \\ \alpha^L(R,G)\colon H_n(BG;\mathbf{L}_R) &\to L_n(R[G]). \end{aligned}$$

Der Definitionsbereich dieser Abbildungen ist dabei in beiden Fällen eine verallgemeinerte Homologietheorie ausgewertet auf einem gewissen Raum BG. (Dieser Raum BG wird der Gruppe G natürlich zugeordnet und ist asphärisch mit Fundamentalgruppe G.) Verallgemeinerte Homologietheorien, wie $H_n(-,\mathbf{K}_R)$, ordnen topologischen Räumen abelsche Gruppen zu. Für jeden topologischen Raum X und jedes $n \in \mathbb{Z}$ erhält man also eine abelsche Gruppe $H_n(X;\mathbf{K}_R)$. Eine solche verallgemeinerte Homologietheorie erfüllt eine Reihe weiterer Eigenschaften, die unter anderem dazu führen, dass $H_n(BG;\mathbf{K}_R)$ in gewissem Sinne berechenbar ist. Die Bausteine solcher Berechnungen sind dabei einerseits die K-Gruppen $K_j(R)$ mit $j \leq n$ des Koeffizientenrings und andererseits die Homologiegruppen $H_i(G)$ für $i \in \mathbb{N}$ der Gruppe G. Man kann also sagen, dass in $H_n(BG;\mathbf{K}_R)$ die Homologie der Gruppe G und die K-Theorie des Rings R zusammengesetzt wird. Da $K_j(R)$ nur von R, aber nicht von G, und $H_i(G)$ nur von G, aber nicht von R abhängt, zeigt sich hier sehr deutlich die Trennung der Variablen R und G. Entsprechendes gilt

[6] Genauer gesagt, sollte R ein Ring mit Involution sein. Die Vorschrift $n \cdot g \mapsto n \cdot g^{-1}$ definiert eine solche Involution auf dem ganzzahligen Gruppenring.

[7] Die genaue Definiton der L-Gruppen hängt zusätzlich von der Wahl einer Dekoration j ab. Diese wird im Folgenden ignoriert.

auch für $H_n(BG; \mathbf{L}_R)$. In diesem Fall sind die L-Gruppen $L_j(R)$ mit $j \leq n$ und die Homologiegruppen $H_i(G)$ für $i \in \mathbb{N}$ die Bausteine für Berechnungen.

Vermutung (Farrell-Jones-Vermutung für torsionsfreie Gruppen)**.** *Sei G eine torsionsfreie Gruppe und R ein regulärer Ring. Dann sind die Abbildungen $\alpha^K(R,G)$ und $\alpha^L(R,G)$ Isomorphismen.*

Beispiele von regulären Ringen sind Körper und der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen. Folgende Anwendungen belegen die Bedeutung dieser Vermutung.

(i) Ist M eine asphärische Mannigfaltigkeit von Dimension mindestens 5 und erfüllt ihre Fundamentalgruppe die Farrell-Jones-Vermutung (bezüglich des Rings $\mathbb{Z}$), so ist M topologisch starr. Es gilt in diesem Fall also die Borel-Vermutung für M.

(ii) Ist G eine torsionsfreie Gruppe, für die $\alpha_K(G,\mathbb{Z})$ ein Isomorphismus ist, so gilt $\mathrm{Wh}(G) = 0$ und $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}G) = 0$. Die Farrell-Jones-Vermutung impliziert also die im Abschnitt 3 diskutierten Vermutungen.

(iii) Sei G eine torsionsfreie Gruppe und F ein Körper der Charakteristik 0. Ist $\alpha_K(G,F)$ ein Isomorphismus, so enthält $F[G]$ keine nicht-trivialen idempotente Elemente. Es gilt in diesem Fall also die Kaplansky-Vermutung.

Für beliebige Gruppen G und Ringe R sind die Assemblyabbildungen $\alpha^K(R,G)$ und $\alpha^L(R,G)$ im Allgemeinen keine Isomorphismen. Hier ergeben sich schnell Gegenbeispiele, im Wesentlichen liefern schon die in Abschnitt 2 beschriebenen Beispiele von nicht-kanonischen Einheiten Gegenbeispiele. Insbesondere ist die K-theoretische Assemblyabbildung im Allgemeinen für endliche Gruppen und, falls der Koeffizientring R hinreichend kompliziert ist, für die unendlich zyklische Gruppe kein Isomorphismus. In diesen Fällen lässt sich die K-Theorie also nicht wie oben beschrieben zerlegen. Endliche Gruppen und die unendlich zyklische Gruppe sind Beispiele für virtuell zyklische Gruppen. Eine Gruppe heißt *virtuell zyklisch*, falls sie eine zyklische Untergruppe von endlichem Index besitzt. Für solche Gruppen ist die Abbildung α^K oft kein Isomorphismus. Die allgemeine Version der Farrell-Jones-Vermutung sagt vorher, dass sich die algebraische K-Theorie eines Gruppenrings $R[G]$ aus der algebraischen K-Theorie aller Gruppenringe der Form $R[V]$, wobei V eine virtuell zyklische Untergruppe von G ist, und Gruppenhomologie zusammensetzt. Dies kann als eine schwächere Form der Trennung der Variablen verstanden werden: R kann nicht ganz von G getrennt werden; virtuell zyklische Untergruppen von G bleiben an R kleben. Diese Version der Vermutung ist nun trivialerweise für alle virtuell zyklischen Gruppen richtig, da sie besagt, dass sich für eine beliebige virtuell zyklische Gruppe V die algebraische K-Theorie von $R[V]$ mittels der algebraischen K-Theorie von $R[V]$ berechnen lässt.

Nun könnte man erwarten, dass sich auch zu dieser Formulierung der Vermutung ähnlich schnell Gegenbeispiele ergeben, die dann eine erneute Modifikation der Vermutung nötig machen. Dies ist aber noch nicht passiert: es gibt bisher kein Beispiel einer Gruppe G, für die diese Vermutung falsch ist. Gruppenringe über virtuell zyklischen Gruppen scheinen also vom Blickwinkel der algebraischen K-Theorie die fundamentalen Bausteine von beliebigen Gruppenringen zu sein. In geometrischen Beweisen der Farrell-Jones-Vermutung wird die besondere Rolle der virtuell zyklischen Gruppen sichtbar. Hier spielen gewisse äquivariante Flussräume (beispielsweise der geodätische Fluss) eine wichtige Rolle. Virtuell zyklische Untergruppen sind dann die einzigen Untergruppen, deren Wirkungen einzelne Flusslinien erhalten. Es wäre sehr interesant, eine algebraische Erklärung für die Sonderrolle der virtuell zyklischen Gruppen zu finden.

Der Vollständigheit halber sei hier noch kurz die Farrell-Jones-Vermutung für beliebige Gruppenringe in der Sprache von Assemblyabbildungen skizziert. Für jeden

Ring R und jede Gruppe G gibt es Assemblyabbildungen relativ zur Familie VCyc der virtuell zyklischen Untergruppen von G

$$\begin{aligned} \alpha^K_{\mathrm{VCyc}}(R,G)\colon H^G_n(E_{\mathrm{VCyc}}G;\mathbf{K}_R) &\to K_n(R[G]),\\ \alpha^L_{\mathrm{VCyc}}(R,G)\colon H^G_n(E_{\mathrm{VCyc}}G;\mathbf{L}_R) &\to L_n(R[G]). \end{aligned}$$

Dabei sind nun $H^G_n(-;\mathbf{K}_R)$ und $H^G_n(-;\mathbf{L}_R)$ äquivariante Homologietheorien und $E_{\mathrm{VCyc}}G$ ist ein topologischer Raum mit einer G-Wirkung, der natürlich einer Gruppe G zusammen mit der Familie ihrer virtuell zyklischen Untergruppen zugeordnet wird.

Vermutung (Farrell-Jones)**.** *Sei R ein Ring und G eine Gruppe. Dann sind die Abbildungen $\alpha^K_{\mathrm{VCyc}}(R,G)$ und $\alpha^L_{\mathrm{VCyc}}(R,G)$ Isomorphismen.*

Diese Vermutung wurde ursprünglich nur für den ganzzahligen Gruppenring formuliert [6]. Beliebige Koeffizietenringe wurden zuerst in [1] betrachtet. Im Fall von regulären Ringen und torsionsfreien Gruppen sind die zwei Formulierungen der Farrell-Jones-Vermutung äquivalent. Anwendungen der Vermutung ergeben sich in Algebra, Topologie und Analysis im Zusammenhang mit Moodys Induktionssatz, der Bass-Vermutung über den Hattori-Stallings-Rang, der Novikov-Vermutung zur topologischen Invarianz höherer Signaturen, der Fuglede-Kadison-Determinante und der Berechnung von Nilgruppen. Eine ausführlichere Diskussion dieser Anwendungen findet sich in [4].

Die allgemeine Version der Farrell-Jones-Vermutung ist selbst dann wichtig, wenn man nur an torsionsfreien Gruppenringen über regulären Ringen (oder nur am ganzzahligen Gruppenring) interessiert ist. Auch in diesen Fällen beweist man oft nicht direkt, dass α^K und α^L Isomorphismen sind, sondern zunächst dass α^K_{VCyc} und α^L_{VCyc} Isomorphismen sind.

5. Kontrollierte Topologie

Beweise der Farrell-Jones-Vermutung sind in vielen Fällen von sehr geometrischer Natur. Es wird die Geometrie von Gruppen oder von Räumen mit einer Gruppenwirkung ausgenutzt. Die Verbindung von diesen geometrischen Methoden zur a priori algebraisch/topologisch formulierten Farrell-Jones-Vermutung ergibt sich über die Methoden der kontrollierten Topologie. Dabei werden oft topologische Objekte (wie zum Beispiel ein h-Kobordismus) oder algebraische Objekte (zum Beispiel Matrizen) mit zusätzlicher metrischer Information versehen. Im Fall einer Matrix $A=(a_{i,j})_{i,j\in I}$ ist dies zum Beispiel eine Metrik auf der Indexmenge I der Matrix. Die Größe

$$l(A) := \sup\{d(i,j) \mid i,j\in I, a_{i,j}\neq 0\}$$

quantifiziert (oder kontrolliert) nun, wie weit A davon entfernt ist eine Diagonalmatrix zu sein. Im Zusammenhang mit Gruppenringen betrachtet man nun oft nicht Matrizen über dem Gruppenring, sondern Matrizen über R, deren Indexmenge mit einer freien isometrischen G-Wirkung versehen ist. (Ist G unendlich, so führt dies notwendig zu unendlichen Matrizen.) Zusätzlich fordert man, dass die Matrix G-invariant ist, also $a_{i,j}=a_{g\cdot i,g\cdot j}$ für alle $i,j\in I$ und $g\in G$ gilt. Hier zeigt sich wieder die Trennung der Variablen R und G: Matrizen über dem Gruppenring $R[G]$ werden durch solche G-invariante Matrizen über R ersetzt. Mittels der Größe $l(A)$ lässt sich dann das Bild der im vorangegangenen Abschnitt diskutierten Assemblyabbildungen charakterisieren: Elemente im Bild lassen sich durch Matrizen beschreiben, für die $l(A)$ sehr klein ist. Solche Charakterisierungen ermöglichen es dann, geometrische Eigenschaften von Gruppen zum Studium dieser Assemblyabbildungen zu nutzen. Geometrische Eigenschaften der Gruppe spiegeln sich in der Metrik auf I wieder.

Farrell und Jones ist es mit Hilfe der kontrollierten Topologie gelungen, die Dynamik des geodätischen Flusses auf Mannigfaltigkeiten nichtpositiver Schnittkrümmung zur Untersuchung von Assemblyabbildungen zu nutzen. Diese Verbindung von algebraischer K-Theorie und L-Theorie mit der Differentialgeometrie führte zu positiven Resultaten für die Farrell-Jones-Vermutung im Falle des ganzzahligen Gruppenrings über Fundamentalgruppen nichtpositiv gekrümmter Mannigfaltigkeiten und zum Beweis der Borel-Vermutung für solche Mannigfaltigkeiten.

Eine in der geometrischen Gruppentheorie intensiv studierte Klasse von Gruppen sind die (Gromov)-hyperbolischen Gruppen. Diese Klasse von Gruppen ist durch eine schwache Form von negativer Krümmung charakterisiert. Insbesondere sind alle Fundamentalgruppen negativ gekrümmter Mannigfaltigkeiten hyperbolisch. Die Klasse der hyperbolischen Gruppen ist aber viel größer. In einem gewissen statisitischen Sinn sind fast alle endlich präsentierten Gruppen hyperbolisch. Der folgende Satz ist ein gemeinsames Ergebnis mit Holger Reich und Wolfgang Lück [3] (für algebraische K-Theorie) beziehungsweise mit Wolfgang Lück [2] (für L-Theorie).

Theorem. *Hyperbolische Gruppen erfüllen die Farrell-Jones-Vermutung.*

Insbesondere gilt in diesem Fall die Borel-Vermutung:

Korollar. *Sei M eine asphärische Mannigfaltigkeit der Dimension mindestens* 5, *deren Fundamentalgruppe hyperbolisch ist. Dann ist M topologisch starr.*

Hyperbolische Gruppen werden oft zur Konstruktion exotischer Gruppen benutzt. Formale Eigenschaften der Farrell-Jones-Vermutung können dann benutzt werden um zu zeigen, dass die so konstruierten Gruppen auch die Farrell-Jones-Vermutung erfüllen. Derartige Konstruktionen mit hyperbolischen Gruppen können also nicht zu Gegenbeispielen zur Farrell-Jones-Vermutung führen. Andererseits wurde mit Hilfe hyperbolischer Gruppen ein Gegenbeispiel einer (starken) Version der Baum-Connes-Vermutung konstruiert [9]. Die Baum-Connes-Vermutung ist ein Verwandter der Farrell-Jones-Vermutung aus der nichtkommutativen Geometrie. In ihr wird die topologische K-Theorie einer Vervollständigung des komplexen Gruppenrings studiert.

Im Zusammenhang mit der Frage, ob die hier diskutierten Vermutungen wirklich für alle Gruppen richtig sein können, hört man oft die Gromov zugeschriebenen Faustregel: *Jede Aussage, die für alle Gruppen richtig ist, ist trivial.* Andererseits gibt es auch im Zusammenhang mit der Farrell-Jones-Vermutung positive Aussagen von sehr großer Allgemeinheit. So ist die Abbildung $\alpha^K(G,\mathbb{Z})$ für eine sehr große Klasse von Gruppen rational injektiv [5]. Diese Klasse von Gruppen enthält alle Fundamentalgruppen von asphärischen Mannigfaltigkeiten. In meinen Augen ist dies ein Grund für Optimismus bezüglich der Borel-Vermutung: vielleicht sind wirklich alle asphärischen Mannigfaltigkeiten topologisch starr.

Ich danke Clara Löh für ihre Hilfe bei der Erstellung dieses Artikels.

Literatur

[1] A. Bartels, T. Farrell, L. Jones, und H. Reich. On the isomorphism conjecture in algebraic K-theory. *Topology*, 43(1):157–213, 2004.

[2] A. Bartels und W. Lück. The Borel conjecture for hyperbolic and CAT(0)-groups. Preprintreihe SFB 478 — Geometrische Strukturen in der Mathematik, Heft 506 Münster, arXiv:0901.0442v1 [math.GT], 2009.

[3] A. Bartels, W. Lück, und H. Reich. The K-theoretic Farrell-Jones conjecture for hyperbolic groups. *Invent. Math.*, 172(1):29–70, 2008.

[4] A. Bartels, W. Lück, und H. Reich. On the Farrell-Jones Conjecture and its applications. *Journal of Topology*, 1:57–86, 2008.

[5] M. Bökstedt, W. C. Hsiang, und I. Madsen. The cyclotomic trace and algebraic K-theory of spaces. *Invent. Math.*, 111(3):465–539, 1993.

[6] F. T. Farrell und L. E. Jones. Isomorphism conjectures in algebraic K-theory. *J. Amer. Math. Soc.*, 6(2):249–297, 1993.

[7] F. T. Farrell und L. E. Jones. Topological rigidity for compact non-positively curved manifolds. In *Differential geometry: Riemannian geometry (Los Angeles, CA, 1990)*, Seiten 229–274. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[8] T. Farrell. The Borel conjecture. In T. Farrell, L. Göttsche, und W. Lück, Herausgeber, *High dimensional manifold theory*, Nr. 9 in ICTP Lecture Notes, Seiten 225–298. Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, 2002.

[9] N. Higson, V. Lafforgue, und G. Skandalis. Counterexamples to the Baum-Connes conjecture. *Geom. Funct. Anal.*, 12(2):330–354, 2002.

Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Mathematisches Institut, Einsteinstr. 62, D-48149 Münster, Deutschland

E-mail address: `bartelsa@math.uni-muenster.de`

URL: `http://www.math.uni-muenster.de/u/bartelsa`